سلسلة الرشاد

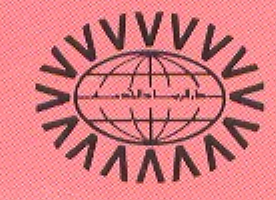
السنة 3 الثالثة

الثانوية

الرياضيات

شعبة العلوم الرياضية

التحليل



المملكة المغربية





***

برامج مادة الرياضيات
بالسنة الثانية
من سلك البكالوريا

***

برنامج مادة الرياضيات بالسنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم الرياضية

مسلك علوم رياضية أ

مسلك علوم رياضية ب

I - التحليل

هناك هدفان لهذا الجزء:

- توسيع مجال المتتاليات والدوال العددية التي تم التطرق إليها بالسنة الأولى من سلك البكالوريا بإدراج بعض المفاهيم الجديدة (نهاية متتالية ــ المتتالية المتقاربة ــ الاتصال في نقطة وعلى مجال -تكامل دالة على قطعة ــ متتالية معرفة بتكامل ــ ...) وتقديم بعض الدوال الجديدة (الدوال العكسية للدوال المثلثية ــ دوال الجذور النونية والقوى الجذرية ــ الدوال اللوغاريتمية ــ الدوال الأسية ــ الدوال المعرفة بتكامل...).
- تقديم الحساب التكاملي وتطبيقاته ومفهوم المعادلات التفاضلية.

إن التمكن من الدراسة التقليدية لدالة عددية ودراسة متتالية عددية يعتبر ضروريا غير أن هذه الدراسة ليست هدفا في حد ذاتها وإنما الهدف هو اعتمادها كأداة رياضية في حل المسائل (البحث عن المطاريف، مقارنة الصيغ التحليلية، الحل الهندسي للمتراجحات والمعادلات، التأطير، التقريب...).

المتتاليات العددية

لقد تم التطرق بالسنة الأولى من سلك البكالوريا إلى عموميات حول المتتاليات العددية وإلى مميزات المتتاليات الحسابية والهندسية وبعض تطبيقاتهما لتعويد التلاميذ على التعامل مع وضعيات متقطعة ووصفها باستعمال المتتاليات. كما كان مناسبة لممارسة بعض أنواع الاستدلالات الرياضية (البرهان بالترجع على سبيل المثال). أما خلال هذه السنة فيتم تزويد التلاميذ ببعض الأدوات الضرورية لدراسة سلوك متتالية عددية شموليا وبجوار ما لا نهاية واستخلاص نتائج بشأنها وتوظيفها في تحديد تقريبات لبعض الأعداد الحقيقية وفي حل مسائل متنوعة من مواد التخصص.

إن درس المتتاليات لا ينتهي بانتهاء الفصل المخصص لها بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة. كما يتم التركيز على توظيف المتتاليات في حل المسائل المتعلقة بالتأطير والتقريب سواء لأعداد حقيقية أو صيغ أو تعابير جبرية.... ويكون هذا الفصل مناسبة لممارسة التلاميذ للاستدلالات الرياضية وتعويدهم على الدقة في صياغة البراهين والنصوص الرياضية.

الاتصال

إن مفهوم الاتصال من المفاهيم الجديدة في هذا المستوى؛ وقد تم إدراجه اعتبارا لدوره في تقديم عدة خاصيات أساسية تتعلق بالدوال العددية وتمثيل الدوال مبيانيا وحل المعادلات والمتراجحات والتقريب والتأطير وكأداة رياضية قوية وفعالة في إثبات المبرهنات والخاصيات بطريقة أكثر دقة ووضوحا .

يتم تقديم مفهوم الاتصال انطلاقا من مفهوم النهاية والتركيز على اتصال دالة على قطعة وعلى مجال وأثر ذالك على منحنى الدالة (منحنى متصل) وعلى صورة مجال أو قطعة بدالة متصلة وبدالة متصلة ورتيبة قطعا، ويتم التركيز خصوصا على مبرهنة القيم

الوسيطية و تطبيقاتها المختلفة وعلى حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال (حالة المعادلات من نوع $f(x)=x$ ...)، كما يكون هذا الفصل مناسبة للتذكير بدالة الجزء الصحيح (يستعمل الرمز $E(x)$) كمثال لدالة غير متصلة في عدد لا منته من النقط .

الاشتقاق

يتم خلال هذه الفقرة :

- تقديم مبرهنة الدوال العكسية (مبرهنة الدوال التقابلية) ثم تطبيقها في تقديم الدالتين $x \to Arc\tan(x)$ و $x \to \sqrt[n]{x}$ والقوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا ؛
- تقديم دالة اللوغاريتم النبيري مباشرة بعد تقديم الاشتقاق والدوال الأصلية، كالدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1؛
- تقديم الدالة الأسية النبيرية إما كالدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري وإما كالحل الوحيد للمعادلة التفاضلية $y'=y$ و $y(0)=1$ أو كالحل الوحيد للمعادلة الدالية $f(x+y)=f(x)f(y)$ ؛
- تعريف العدد a^x ($a^x=e^{x\ln(a)}$) باستعمال تعريف وخاصيات الدالة الأسية النيبيرية؛
- التركيز على تطبيقات مبرهنة رول ومبرهنة التزايدات المنتهية و متفاوتة التزايدات المنتهية في تأطير وإكبار وإصغار التعابير الجبرية باعتبارها من أهم نتائج دروس التحليل خلال هذه السنة كما يجب العمل على أن يتمكن التلاميذ من التأويلات الهندسية لمختلف هذه الخاصيات .

1 النهايات والاتصال

- النهايات والاتصال
- مركب دالتين
- صورة مجال بدالة متصلة
- مبرهنة القيم الوسيطية
- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال
- دالة الجذر من الرتبة n – القوى الجذرية
- الدوال العكسية للدوال المثلثية

1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1} - x^2$$

1- حدد نهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2- لتكن S مجموعة حلول المتراجحة التالية

$$|f(x) - 1| < 1$$

أ- حدد نهاية f عند 0

ب- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي α موجب قطعا بحيث $]-\alpha, \alpha[\subset S$

1- نهايتا الدالة f

ليكن x عنصرا من IR. لدينا :

$$f(x) = \frac{x^3 + 1 - x^2(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{-x^4 + x^3 - x^2 + 1}{x^2+1}$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x^2$$

$$= -\infty$$

وبالمثل لدينا

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2-أ- نهاية f عند 0

لدينا f دالة جذرية ومنه فإن f متصلة على مجموعة تعريفها وبما أن 0 ينتمي إلى مجموعة تعريفها فإن

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$= 1$$

ب- الاستنتاج

لدينا $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ وحسب تعريف النهاية لدينا

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \in IR)\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

بالنسبة لـ $\varepsilon = 1$ يوجد عدد حقيقي موجب قطعا α بحيث

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\qquad |f(x) - 1| < 1$$

بمعنى أن $]-\alpha, \alpha[\subset S$

* * * *

2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x\cos x + 1}$$

1- بين أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

2- استنتج ما يلي :

أ- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

1- إثبات النتيجة المقترحة

لدينا $|\cos x| \le 1 \quad \forall x \in IR$ ومنه $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \quad \forall x \in IR^*$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

2-أ- الاستنتاج الأول

ليكن x عنصرا من IR^*. لدينا

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left(1 - 2 . \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - 2 . \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2 . \cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- الاستنتاج الثاني

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x^2 - 2x\cos x + 1}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1 - 2 . \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

* * * *

3

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي

$$h(x) = x \sqrt{\left[\frac{1}{x}\right]^2 - \left[\frac{1}{x}\right]}$$

1- أ- بين أنه مهما يكن x من $]0, \frac{1}{2}[$ فإن

$$\sqrt{(1-x)(1-2x)} < h(x) < \sqrt{1-x}$$

ب- استنتج نهاية h على اليمين في 0.

2- هل الدالة h تقبل تمديدا بالاتصال في 0 ؟

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]0,\frac{1}{2}[$

لدينا $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$

ومنه $\frac{1}{x}-2<\left[\frac{1}{x}\right]-1\le\frac{1}{x}-1$

وبما أن $0<x<\frac{1}{2}$ فإن $\frac{1}{x}-2>0$ و $\frac{1}{x}-1>0$ ومنه

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)<\left[\frac{1}{x}\right]\left(\left[\frac{1}{x}\right]-1\right)\le\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

أي $\frac{(1-x)(1-2x)}{x^2}<\left[\frac{1}{x}\right]^2-\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1-x}{x^2}$

إذن $\frac{\sqrt{(1-x)(1-2x)}}{x}<\sqrt{\left[\frac{1}{x}\right]^2-\left[\frac{1}{x}\right]}\le\frac{\sqrt{1-x}}{x}$

ومنه $\sqrt{(1-x)(1-2x)}<h(x)\le\sqrt{1-x}$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\quad \sqrt{(1-x)(1-2x)}<h(x)\le\sqrt{1-x}$

وبما أن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{1-x}=1$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{(1-x)(1-2x)}=1$

فإن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}h(x)=1$

2- الدالة h لا تقبل تمديدا بالاتصال في 0

للاجابة عن هذا السؤال نحسب أولا نهاية h على اليسار في 0.

ليكن x عنصرا من IR_-^*

لدينا $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$ و $\frac{1-2x}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]-1\le\frac{1-x}{x}$

وبما أن أطراف هاتين المتفاوتتين المزدوجتين سالبة فإن

$$\frac{(1-2x)(1-x)}{x^2}>\left[\frac{1}{x}\right]\left(\left[\frac{1}{x}\right]-1\right)\ge\frac{1-x}{x^2}$$

ومنه $\frac{\sqrt{(1-2x)(1-x)}}{-x}>\sqrt{\left[\frac{1}{x}\right]\left(\left[\frac{1}{x}\right]-1\right)}\ge\frac{\sqrt{1-x}}{-x}$

إذن $-\sqrt{1-x}\ge h(x)>-\sqrt{(1-2x)(1-x)}$

ومنه $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}h(x)=-1$

وبما أن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}h(x)=1$ فإن

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}h(x)\neq\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}h(x)$$

وبالتالي فإن h لا تقبل تمديدا بالاتصال في 0.

* * * *

4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x)=x\sqrt{\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2+1}\quad;\quad x\neq0$$
$$f(0)=1$$

1- أ- بين أن $(\forall x\in IR_+^*)\ \sqrt{x^2+1}<f(x)\le\sqrt{2x^2+2x+1}$

ب- استنتج أن f متصلة على اليمين في 0.

2- حدد نهاية f على اليسار في 0.

3- هل الدالة f متصلة في 0 ؟ علل جوابك.

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$ ومنه $\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\le\frac{1+x}{x}$

وبما أن $\frac{1}{x}>0$ فإن

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2<\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2\le\left(\frac{1+x}{x}\right)^2$$

ومنه $\frac{1}{x^2}+1<\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2+1\le\left(\frac{1+x}{x}\right)^2+1$

إذن $\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}<\sqrt{\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2+1}\le\sqrt{\frac{(1+x)^2+x^2}{x^2}}$

أي $\sqrt{1+x^2}<f(x)\le\sqrt{(1+x)^2+x^2}$

بمعنى أن $\sqrt{1+x^2}<f(x)\le\sqrt{2x^2+2x+1}$

ب- الاستنتاج

لدينا $(\forall x\in IR_+^*)\ \sqrt{1+x^2}<f(x)\le\sqrt{2x^2+2x+1}$

ولدينا $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{1+x^2}=1$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

إذن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=1=f(0)$

وبالتالي فإن f متصلة على اليمين في 0.

2- نهاية f على اليسار في 0

ليكن x عنصرا من $]-1 , 0[$.

لدينا $\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$ ومنه $\frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right]+1 \le \frac{1+x}{x}$

لدينا $-1 < x < 0$ ومنه $\frac{x+1}{x} < 0$ و $\frac{1}{x} < 0$

إذن $$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 < \left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2 \le \frac{1}{x^2}$$

ومنه $$\frac{(1+x)^2+x^2}{x^2} < \left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2+1 \le \frac{1+x^2}{x^2}$$

إذن $$\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{-x} < \sqrt{\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)^2+1} \le \frac{\sqrt{1+x^2}}{-x}$$

ومنه $$-\sqrt{1+x^2} \le f(x) \le -\sqrt{2x^2+2x+1}$$

وبما أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\sqrt{1+x^2} = -1$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\sqrt{2x^2+2x+1} = -1$

فإن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$

3- الدالة f غير متصلة في 0

لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$ و $f(0) = 1$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \ne f(0)$

إذن f غير متصلة على اليسار في 0.

وبالتالي فإن f غير متصلة في 0.

* * * *

5

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} \forall x \in IR^* & g(x) = \left[\frac{1}{x}\right]\sin x \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1- بين أن $\forall x \in IR^* \quad \left|g(x) - \frac{\sin x}{x}\right| \le |\sin x|$

2- استنتج أن g متصلة في 0.

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR^*.

لدينا $\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$

- إذا كان $\sin x \ge 0$ فإن $\frac{\sin x}{x} - \sin x \le \left[\frac{1}{x}\right]\sin x \le \frac{\sin x}{x}$

أي $-\sin x \le g(x) - \frac{\sin x}{x} \le 0$

بمعنى أن $\left|g(x) - \frac{\sin x}{x}\right| \le |\sin x|$

- إذا كان $\sin x \le 0$ فإن $\sin x \le \left[\frac{1}{x}\right]\sin x \le \frac{\sin x}{x} - \sin x$

أي $0 \le g(x) - \frac{\sin x}{x} \le -\sin x$

بمعنى أن $\left|g(x) - \frac{\sin x}{x}\right| \le |\sin x|$

إذن $\forall x \in IR^* \quad \left|g(x) - \frac{\sin x}{x}\right| \le |\sin x|$

2- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in IR^* \quad \left|g(x) - \frac{\sin x}{x}\right| \le |\sin x|$

وبما أن $\lim_{x\to 0} |\sin x| = 0$ فإن

$$\lim_{x\to 0}\left(g(x) - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

وبما أن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ فإن $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$

أي $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$

وهذا يعني أن g متصلة في 0.

* * * *

6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

ليكن n عددا صحيحا نسبيا

1- بين أن f متصلة على $[n , n+1[$

2- ادرس اتصال f على اليسار في n.

3- هل الدالة f متصلة على IR ؟ علل جوابك.

1- اتصال الدالة f على $[n , n+1[$

ليكن x عنصرا من $[n , n+1[$. لدينا $E(x) = n$.

ومنه $$f(x) = n + (x-n)^2 = x^2 - 2nx + n^2 + n$$

إذن f هي قصور دالة حدودية على $[n , n+1[$. وبما أن كل حدودية متصلة على IR فإن f متصلة على $[n , n+1[$.

2- اتصال الدالة f على اليسار في n

ليكن x عنصرا من $]n-1 , n[$. لدينا $E(x) = n - 1$. ومنه

$$f(x) = n - 1 + (x - n + 1)^2$$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} \left(n - 1 + (x - n + 1)^2\right) = (n - 1) + 1 = n = f(n)$$

وبالتالي فإن الدالة f متصلة على اليسار في n.

3- الدالة f متصلة على IR.

ليكن n عددا صحيحا نسبيا.

لدينا f متصلة على $]n , n + 1[$ ومنه f متصلة على $[n , n + 1[$ ومتصلة على اليمين في n.

وبما أنها متصلة على اليسار في n فإنها متصلة في n.

إذن f متصلة على IR.

* * * *

7

لتكن f دالة عددية معرفة على IR_+^* وتزايدية قطعا على IR_+^*

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1- ليكن a عنصرا من IR_+^*. بين أن

$$\forall x \in IR_+^* - \{a\} \qquad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(a)}{ax}$$

2- استنتج أنه إذا كانت g تناقصية على IR_+^* فإن f متصلة على IR_+^*

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $IR_+^* - \{a\}$

لدينا
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{f(a)}{a}}{x - a} = \frac{a f(x) - x f(a)}{xa(x - a)}$$

ولدينا
$$\frac{1}{x} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(a)}{ax} = \frac{a(f(x) - f(a)) - f(a)(x - a)}{ax(x - a)}$$
$$= \frac{af(x) - af(a) + af(a) - xf(a)}{ax(x - a)}$$
$$= \frac{af(x) - xf(a)}{ax(x - a)}$$

إذن
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{1}{x} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(a)}{ax}$$

2- الاستنتاج

ليكن a عنصرا من IR_+^*. نبين أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

حسب السؤال السابق لدينا

$$\forall x \in IR_+^* - \{a\} \qquad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(a)}{ax}$$

وبما أن g تناقصية على IR_+^* فإن $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq 0 \qquad \forall x \in IR_+^* - \{a\}$

ومنه $\frac{1}{x} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a)}{ax} \qquad \forall x \in IR_+^* - \{a\}$

أي $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a)}{a} \qquad \forall x \in IR_+^* - \{a\}$

وبما أن f تزايدية على IR_+^* فإن

$$\forall x \in IR_+^* - \{a\} \qquad 0 \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

إذن $0 \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a)}{a} \qquad \forall x \in IR_+^* - \{a\}$

ومنه $\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \leq \frac{f(a)}{a} \qquad \forall x \in IR_+^* - \{a\}$

أي $|f(x) - f(a)| \leq \frac{f(a)}{a} |x - a| \qquad \forall x \in IR_+^* - \{a\}$

وبما أن $\lim_{x \to a} |x - a| = 0$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

وبالتالي فإن f متصلة على IR_+^*.

* * * *

8

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin(\pi \sqrt{1 + x})$$

ونعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = \frac{\sin x}{\pi - x} \quad : \quad x \neq \pi \qquad \text{و} \qquad g(\pi) = 1$$

1- بين أنه مهما يكن x من $]-1 , 0[\cup]0 , +\infty[$ فإن

$$f(x) = \pi \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + x}} g(\pi \sqrt{1 + x})$$

2- أ- بين أن g متصلة في π

ب- استنتج نهاية f عند 0.

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]-1 , 0[\cup]0 , +\infty[$ لدينا :

$$g(\pi \sqrt{1 + x}) = \frac{\sin(\pi \sqrt{1 + x})}{\pi - \pi \sqrt{1 + x}} = \frac{\sin(\pi \sqrt{1 + x})}{\pi(1 - \sqrt{1 + x})}$$

ومنه $\sin(\pi \sqrt{1 + x}) = \pi(1 - \sqrt{1 + x}) g(\pi \sqrt{1 + x})$

إذن
$$f(x) = \frac{\pi(1 - \sqrt{1 + x})}{x} g(\pi \sqrt{1 + x})$$
$$= \pi \cdot \frac{1 - (1 + x)}{x(1 + \sqrt{1 + x})} g(\pi \sqrt{1 + x})$$
$$= \pi \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + x}} g(\pi \sqrt{1 + x})$$

إذن مهما يكن x من $]-\infty, 0[\cup]0, 1-[$ فإن

$$f(x) = \pi \cdot \frac{-1}{1+\sqrt{1+x}}\, g(\pi\sqrt{1+x})$$

2- أ- اتصال الدالة g في π.

لدينا $\sin(\pi - x) = \sin x$ مهما يكن x من IR ومنه

$$\lim_{x\to\pi} g(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1$$

إذن $\lim_{x\to\pi} g(x) = g(\pi)$

ومنه g متصلة في π.

ب- الاستنتاج

لدينا مهما يكن x من $]-\infty, 0[\cup]0, 1-[$:

$$f(x) = \frac{-\pi}{1+\sqrt{1+x}}\, g(\pi\sqrt{1+x})$$

ولدينا $\lim_{x\to 0} \pi\sqrt{1+x} = \pi$ و g متصلة في π ومنه

$$\lim_{x\to 0} g(\pi\sqrt{1+x}) = g(\pi)$$

$$= 1$$

ولدينا $\lim_{x\to 0} \frac{-\pi}{1+\sqrt{1+x}} = -\frac{\pi}{2}$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

* * * *

9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} & ; x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ونعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 & ; x \neq 0 \\ g(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1- بين أن $\forall x \in IR \quad f(x) = g\left(\frac{\sqrt{|x|}}{2}\right)$

2- بين أن g متصلة على IR

3- استنتج أن f متصلة على IR .

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR^*

لدينا $f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$

$$= \frac{2}{|x|}\sin^2\left(\frac{\sqrt{|x|}}{2}\right)$$

لأن مهما يكن x من IR فإن $\cos X = 1 - 2\sin^2\left(\frac{X}{2}\right)$

ومنه $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\right)\right]^2$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{|x|}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{|x|}}{2}}\right)^2$$

$$= g\left(\frac{\sqrt{|x|}}{2}\right)$$

لدينا $g(0) = \frac{1}{2}$ و $f(0) = \frac{1}{2}$

إذن $f(x) = g\left(\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\right) \quad \forall x \in IR$

2- الدالة g متصلة على IR

لدينا $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \quad \forall x \in IR^*$

وبما أن الدالة $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ متصلة على IR^* فإن الدالة g متصلة على IR^*

(كجداء دالتين متصلتين على IR^*).

لدينا $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= g(0)$$

ومنه g متصلة في 0.

وبالتالي فإن g متصلة على IR .

3- الاستنتاج

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي

$$h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}$$

حسب السؤال الأول لدينا $f = g \circ h$

لدينا $x \mapsto |x|$ متصلة على IR ومنه h متصلة على IR .

وبما أن g متصلة على IR فإن f متصلة على IR.

* * * *

10

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2- بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

3- حدد نهاية f عند $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ على اليمين وعلى اليسار

4- بين أن f متصلة على D .

1- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$

ومنه $-\frac{\pi}{2} \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2}$

إذن

$$\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ومنه $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2- تمديد الدالة f بالاتصال في $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ليكن x عنصرا من D .

لدينا

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sin(\cos x)}$$

$$= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin(\cos x)}$$

نضع $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لدينا

$$\lim_{x \to \alpha} \cos x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ومنه $\lim_{x \to \alpha} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = 1$

أي $\lim_{x \to \alpha} \frac{\cos x}{\sin(\cos x)} = 1$

ولدينا $\lim_{x \to \alpha} (1 + \sin x) = 2$ و $\lim_{x \to \alpha} \cos x = 0$

إذن $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$

وبالتالي فإن f تقبل تمديدا بالاتصال في $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3- نهاية f عند $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

نضع $\beta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

لدينا $\lim_{x \to \beta} (1 - \sin x) = 1 - \sin\beta$

$$= 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$$

$$= 2$$

ولدينا $\lim_{x \to \beta} \sin(\cos x) = \sin(\cos\beta)$

$$= \sin 0$$

$$= 0$$

x	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$		β		$\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi$
cos x	0	-	0	+	0
sin (cos x)	0	-	0	+	0

ومنه $\lim_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} \frac{1}{\sin(\cos x)} = -\infty$

$$\lim_{\substack{x \to \beta \\ x > \beta}} \frac{1}{\sin(\cos x)} = +\infty$$

إذن $\lim_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to \beta \\ x > \beta}} f(x) = +\infty$

4- اتصال الدالة f على D

لدينا الدالة $x \mapsto 1 - \sin x$ متصلة على IR ومنه فإنها متصلة على D.

لدينا الدالة cos متصلة على IR والدالة sin متصلة على [-1 , 1]

وبما أن $-1 \leq \cos x \leq 1$ لكل x من IR فإن الدالة sin o cos متصلة على IR.

ولدينا $\forall x \in D \quad \sin(\cos x) \neq 0$

إذن الدالة f متصلة على D .

* * * *

11

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = x^2 \sin\left(\frac{E(x)}{x^2}\right)$$

1- بين أن $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$

2- بين أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x^2} = 0$

3- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

1- اثبات النتيجة الاولى

ليكن x عنصرا من $[1, +\infty[$.

لدينا $x \leq E(x)$ وبما أن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$

2– اثبات النتيجة الثانية

ليكن x عنصرا من $[1, +\infty[$.

لدينا $x \le E(x) < x + 1$ ومنه $\frac{1}{x} \le \frac{E(x)}{x^2} < \frac{x+1}{x^2}$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$

فإن $\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x^2} = 0$

3– الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$. لدينا

$$f(x) = E(x) \cdot \frac{x^2}{E(x)} \sin\left(\frac{E(x)}{x^2}\right)$$

$$= E(x) \cdot \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}$$

حيث φ هي الدالة العددية بما يلي

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \varphi(x) = \frac{E(x)}{x^2}$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ و $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* * * *

12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1– بين أن $|f(x)| < 1 \quad \forall x \in IR$.

2– حدد نهاية f عند $+\infty$

3– استنتج صورة IR بالدالة f.

1– اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$|f(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $|f(x)| < 1$

إذن $|f(x)| < 1 \quad \forall x \in IR$

2– نهاية f عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

$$= 1$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

3– الاستنتاج

حسب السؤال الأول لدينا

$$f(IR) \subset]-1, 1[$$

لدينا f متصلة على IR لأنها خارج دالتين متصلتين على IR.

ومنه f (IR) مجال مفتوح (لأن IR مجال مفتوح)

وبما أن f فردية فإن $f(IR) =]-\alpha, \alpha[\quad (0 < \alpha \le 1)$

إذن $f(x) \le \alpha \quad \forall x \in IR$.

ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) \le \alpha$ أي $1 \le \alpha$.

إذن $\alpha = 1$

وبالتالي فإن $f(IR) =]-1, 1[$.

* * * *

13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = 1 + \sin x - x$$

1– حدد نهاية f عند $+\infty$ ، $-\infty$.

2– حدد صورة IR بالدالة f

3– بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على اقل في IR.

1– نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

ليكن x عنصرا من *IR. لدينا

$$f(x) = x\left(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x} - 1\right)$$

لدينا $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|}$ ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x} - 1\right) = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x} - 1\right) = -1$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2- صورة المجال IR بالدالة f

لدينا f متصلة على IR لأنها مجموع ثلاث دوال متصلة على IR .

ومنه f (IR) مجال من IR.

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

فإن $f(IR) =]-\infty , +\infty[$.

3- حل المعادلة $f(x) = 0$

لدينا $f(IR) = IR$ ومنه $0 \in f(IR)$

إذن $\exists\ \alpha \in IR \quad f(\alpha) = 0$

وهذا يعني أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الاقل في IR

* * * *

14

لتكن الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

حيث n عنصرا من $IN^* - \{1\}$

1- أ- بين أن f تناقصية قطعا على $\left[0 , \frac{2n}{n+1}\right]$

ب- استنتج أن $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

2- بين أن $\exists\ \alpha \in \left[\frac{2n}{n+1} , 2\right] \quad f(\alpha) = 0$

1-أ- رتابة الدالة f على $\left[0 , \frac{2n}{n+1}\right]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة حدودية

ليكن x عنصرا من IR

لدينا

$$f'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1}$$
$$= x^{n-1}\left((n+1)x - 2n\right)$$
$$= (n+1)x^{n-1}\left(x - \frac{2n}{n+1}\right)$$

إذا كان $0 < x < \frac{2n}{n+1}$ فإن $x - \frac{2n}{n+1} < 0$ و $x^{n-1} > 0$

ومنه $f'(x) < 0$

إذن f تناقصية قطعا على $\left[0 , \frac{2n}{n+1}\right]$

ب- الاستنتاج

لدينا f تناقصية قطعا على $\left[0 , \frac{2n}{n+1}\right]$

وبما أن $n > 1$ فإن $2n > n + 1$ أي $\frac{2n}{n+1} > 1$

ومنه $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < f(1)$

وبما أن $f(1) = 0$ فإن $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

2- وجود العدد α

لدينا : - f متصلة على $\left[\frac{2n}{n+1} , 2\right]$ لأنها دالة حدودية

- $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

- $f(2) > 0$ (لأن $f(2) = 1$)

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن $f(\alpha) = 0 \quad \exists\ \alpha \in \left[\frac{2n}{n+1} , 2\right]$

* * * *

15

لتكن f دالة عددية معرفة على IR^+ بحيث

$$\begin{cases} f \text{ متصلة على } IR^+ \\ \forall\ x \in IR^+ \quad f(x) > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1 \end{cases}$$

1- نفترض أن $f(x) \leq x \quad \forall\ x \in IR^+_*$

بين أن $f(0) \leq 0$

ب- استنتج أن $\exists\ \alpha \in IR^+_* \quad f(\alpha) > \alpha$

2- أ- بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

ب- استنتج $\exists\ \beta \in IR^+ \quad f(\beta) < \beta$

3- استنتج $\exists\ \gamma \in IR^+ \quad f(\gamma) = \gamma$

1-أ- اثبات الاستلزام المقترح

لدينا $f(x) \leq x \quad \forall\ x \in IR^+$

ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \quad \forall\ x \in IR^+_*$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

أي $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$

ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و f متصلة في 0 ومنه

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$$

إذن $f(0) \leq 0$

ب- الاستنتاج

نفترض أن العبارة $\exists\ \alpha \in IR^+_* \quad f(\alpha) \leq \alpha$ خاطئة ومنه

$$\forall\ \alpha \in IR^+_* \quad f(\alpha) \leq \alpha$$

وحسب السؤال السابق لدينا $f(0) \leq 0$

وحسب معطى التمرين لدينا $\forall x \in IR_*^+ \quad f(x) > 0$

إذن $0 < f(0) \leq 0$ وهذا غير ممكن

إذن $\exists \alpha \in IR_*^+ \quad f(\alpha) > \alpha$

2- أ- حساب النهاية المطلوبة

ليكن x عنصرا من IR_*^+

لدينا $f(x) - x = x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right)$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$ أي $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) < 0$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

ب- الاستنتاج

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

إذا كان A عنصرا من IR_+^* فإنه

$$\exists B > 0 \quad \forall x \in IR_+ \quad x > B \Rightarrow f(x) - x < -A$$

إذن $\exists \beta \in IR^+ \quad f(\beta) - \beta < -A$

وبما أن $A > 0$ فإن $f(\beta) - \beta < 0$ ومنه $\exists \beta \in IR^+ \quad f(\beta) < \beta$

3- وجود العدد γ

نفترض أن $\alpha \leq \beta$ ونعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad g(x) = f(x) - x$$

لدينا g متصلة على $[\alpha, \beta]$ لأن :

- f متصلة على IR^+
- $[\alpha, \beta] \subset IR^+$

لدينا $g(\alpha) > 0$ لأن $f(\alpha) > \alpha$

$g(\beta) < 0$ لأن $f(\beta) < \beta$

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا

$\exists \gamma \in [\alpha, \beta] \quad g(\gamma) = 0$ إذن $\exists \gamma \in IR^+ \quad g(\gamma) = \gamma$

* * * *

16

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a, b]$ (a و b عددان حقيقيان بحيث $a < b$).

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in]a, b[\quad g(x) = f(x) - \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}$$

1- حدد $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x)$

2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي α من $]a, b[$ بحيث

$$f(\alpha) = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{b-\alpha}$$

1- تحديد النهايتين

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ لأن f متصلة على اليمين في a.

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{1}{b-x} = \frac{1}{b-a}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{-1}{a-x} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = +\infty$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$ لأن f متصلة على اليسار في b .

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-b}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{-1}{b-x} = -\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x) = -\infty$

2- الاستنتاج

لدينا g متصلة على $]a, b[$ لأنها مجموع ثلاث دوال متصلة على $]a, b[$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x) = -\infty$

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا

$$\forall \alpha \in]a, b[\quad g(\alpha) = 0$$

أي $\exists \alpha \in]a, b[\quad f(\alpha) = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{b-\alpha}$

* * * *

17

لتكن f و g دالتين متصلتين على IR بحيث

$$\begin{cases} \forall x \in IR \quad f(x) < 1 \text{ و } g(x) > 1 \\ \exists a \in IR_*^+ \quad f(a) = a \\ \exists b \in IR_+^* \quad g(b) = b \end{cases}$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c بحيث

$$\begin{cases} \inf(a, b) \leq c \leq \sup(a, b) \\ f(c)\, g(c) = c \end{cases}$$

وجود العدد الحقيقي c

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad h(x) = f(x)\, g(x) - x$$

لدينا h متصلة على IR لأن f و g متصلتين على IR وأن الدالة $x \to -x$ متصلة على IR .

لدينا
$$h(a) = f(a)\,g(a) - a = a\,g(a) - a = a(g(a) - 1)$$

ولدينا
$$h(b) = b(f(b) - 1)$$

ومنه
$$h(a)\,h(b) = ab(g(a) - 1)(f(b) - 1)$$

وبما أن $g(a) > 1$ و $f(b) < 1$ فإن
$$(g(a) - 1)(f(b) - 1) < 0$$

وبما أن $a > 0$ و $b > 0$ فإن $h(a)\,h(b) < 0$

إذا افترضنا أن $a \leq b$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا
$$\exists c \in [a, b] \quad h(c) = c$$

أي
$$\exists c \in [a, b] \quad f(c)\,g(c) = c$$

وإذا افترضنا أن $a > b$ فإنه لدينا
$$\exists c \in [b, a] \quad f(c)\,g(c) = c$$

إذن يوجد عدد حقيقي c بحيث
$$\begin{cases} \inf(a, b) \leq c \leq \sup(a, b) \\ f(c)\,g(c) = c \end{cases}$$

* * * *

18

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ ، ليكن x_1 و .... و x_n عناصرا من $[a, b]$ (n عنصر من IN*).

نفترض أن
$$f(x_1) = \sup(f(x_1), ..., f(x_n))$$
$$f(x_n) = \inf(f(x_1), ..., f(x_n))$$

1- بين أن
$$f(x_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f(x_1)$$

2- استنتج أن
$$\exists \alpha \in [a, b] \quad f(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

1- اثبات المتفاوتة المقترحة

لدينا
$$\forall\ i \in \{1, ..., n\} \quad f(x_n) \leq f(x_i) \leq f(x_1)$$

ومنه
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_1)$$

أي
$$n\,f(x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq n\,f(x_1)$$

إذن
$$f(x_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f(x_1)$$

2- الاستنتاج

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[a, b]$ بما يلي
$$g(x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

لدينا g متصلة على $[a, b]$ لأن f متصلة على $[a, b]$

ولدينا حسب السؤال الأول
$$g(x_1) \geq 0 \quad \text{و} \quad g(x_n) \leq 0$$

إذا افترضنا أن $x_1 \leq x_n$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ولدينا
$$\exists \alpha \in [x_1, x_n] \quad g(\alpha) = 0.$$

إذن
$$\exists \alpha \in [a, b] \quad f(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

* * * *

19

لتكن f دالة عددية معرفة على IR و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

1- نفترض أن
$$\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) > f(x)$$

أ- بين أن
$$(\forall k \in IN^*)(\forall x \in IR) \quad f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x)$$

ب- استنتج أن $f(1) > f(0)$

2- نفترض أن $f(1) = f(0)$ وأن f متصلة على IR.

بين أن
$$\exists \alpha \in IR \quad f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$$

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

* من أجل $k = 1$ لدينا
$$\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x)$$

لأن $\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) > f(x)$ حسب الافتراض.

* ليكن k عنصرا من IN*.

نفترض أن
$$\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x)$$

ونبين أن
$$\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) > f(x)$$

ليكن x عنصرا من IR . لدينا :
$$f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) = f\left(\left(x + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\right)$$

وحسب الافتراض يكون لدينا
$$f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) > f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

وحسب افتراض الترجع يكون لدينا
$$f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) > f(x)$$

إذن
$$(\forall k \in IN^*)(\forall x \in IR) \quad f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x)$$

ب- الاستنتاج

لدينا
$$(\forall k \in IN^*)(\forall x \in IR) \quad f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x)$$

إذا أخذنا $x = 0$ و $k = n$ فإن $f(1) > f(0)$

2- وجود العدد الحقيقي α

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

لدينا g متصلة على IR لأن f متصلة على IR وأن الدالة $x \to x + \frac{1}{n}$ متصلة على IR .

إذا كانت g لا تنعدم في IR فإن

$$\forall x \in IR \quad g(x) > 0$$

أو

$$\forall x \in IR \quad g(x) > 0$$

إذا كان $\forall x \in IR \quad g(x) > 0$ أي $\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) > f(x)$

فإنه حسب السؤال السابق يكون لدينا $f(1) > f(0)$

وهذا يخالف كون $f(0) = f(1)$

إذا كان $\forall x \in IR \quad g(x) < 0$ أي $\forall x \in IR \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) < f(x)$

فإنه حسب السؤال السابق يكون لدينا $(-f)(1) > (-f)(0)$ أي $f(1) < f(0)$ وهذا يخالف كون $f(1) = f(0)$

إذن الدالة g تنعدم في IR.

أي $\exists \alpha \in IR \quad g(\alpha) = 0$

بمعنى أن $\exists \alpha \in IR \quad f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$

* * * *

20

لتكن a و b عددين حقيقيين . نعتبر f دالة العددية معرفة على [a , b] بحيث

$$\begin{cases} f([a, b]) \subset [a, b] \\ \forall x,y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| < |x - y| \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة على [a , b]

2- لتكن الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) = f(x) - x$$

أ- بين أن g تناقصية قطعا على [a , b]

ب- حدد إشارة $g(a)\, g(b)$

3- استنتج أن $\exists !\ \alpha \in [a, b] \quad f(\alpha) = \alpha$

1- اتصال الدالة f على [a , b]

ليكن x_0 عنصرا من]a , b[

لدينا $\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$

وبما أن $\lim_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ فإن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

إذن الدالة f متصلة في x_0.

لدينا $\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f(a)| < |x - a|$

وبما أن $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} |x - a| = 0$ فإن $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في a.

وبالمثل نبين أن f متصلة على اليسار في b.

إذن الدالة f متصلة على [a , b]

2-أ- رتابة الدالة g

ليكن x و y عنصرين مختلفين من [a , b]

لدينا

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(y) - x + y}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - 1$$

لدينا $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ أي $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| < 1$

ومنه $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 1$ أي $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} < 0$

إذن g تناقصية قطعا على [a , b]

ب- اشارة الجداء $g(a)\, g(b)$

لدينا $g(a)\, g(b) = (f(a) - a)(f(b) - b)$

بما أن $f([a, b]) \subset [a, b]$ فإن $a \le f(a)$ و $f(b) \le b$

ومنه $g(a)\, g(b) \le 0$

3- الاستنتاج

لدينا f متصلة على [a , b] ومنه g متصلة على [a , b]

وبما أن g تناقصية على [a , b] فإن g تقابل من [a , b] نحو [g (b) , g (a)]

وبما أن $g(b)\, g(a) \le 0$ فإن $0 \in [g(b), g(a)]$

إذن $\exists !\ \alpha \in [a, b] \quad g(\alpha) = 0$

أي $\exists !\ \alpha \in [a, b] \quad f(\alpha) = \alpha$

* * * *

21

لتكن الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$$

1- بين أن f متصلة على]1 , +∞[

2- أ- بين أن $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) > \frac{1}{2}$

ب- استنتج أن f تناقصية قطعا على]1 , +∞[

3- أ- بين أن f تقابل من]1 , +∞[نحو مجال تجب تحديده.

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل f.

1- اتصال الدالة f

الدالة $x \mapsto x^2 - x$ متصلة على]1 , +∞[لأنها دالة حدودية

ولدينا $\forall x \in]1, +\infty[\quad x^2 - x > 0$

ومنه الدالة $x \mapsto -\sqrt{x^2 - x}$ متصلة على]1 , +∞[.

وبما أن الدالة $x \mapsto x$ متصلة على]1 , +∞[فإن f متصلة على]1 , +∞[.

2- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

لدينا

$$f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - x} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} > \sqrt{x^2 - x}$$

بما أن $x > 1$ فإن $x - \frac{1}{2} > 0$ ومنه

$$f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} > x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} > 0$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $f(x) > \frac{1}{2}$

إذن $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) > \frac{1}{2}$

ب- الاستنتاج

ليكن x و y عنصرين مختلفين من $]1, +\infty[$. لدينا

$$f(x) - f(y) = (x - y) - (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{y^2 - y})$$

$$= (x - y) - \frac{x^2 - x - (y^2 - y)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y}}$$

$$= (x - y)\left[1 - \frac{x + y - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y}}\right]$$

ومنه

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y} - x - y + 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y}}$$

$$= \frac{-f(x) - f(y) + 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y}}$$

وبما أن $f(x) > \frac{1}{2}$ و $f(y) > \frac{1}{2}$ فإن $-f(x) - f(y) + 1 < 0$

إذن $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$

وهذا يعني أن f تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$

3- أ- الدالة f تقابل

لدينا : - f متصلة على $]1, +\infty[$

- f تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$

ومنه f تقابل من $]1, +\infty[$ نحو المجال J حيث

$$J = \left] \lim_{x \to +\infty} f(x) , \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) \right[$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - \sqrt{x^2 - x}) = 1$$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

إذن f تقابل من $]1, +\infty[$ نحو $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

ب- تحديد التقابل العكسي للتقابل f

ليكن x عنصرا من $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ و y عنصرا من $]1, +\infty[$. لدينا

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y - \sqrt{y^2 - y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - y} = y - x$$

بما أن $x < 1$ و $1 < y$ فإن $x < y$ أي $y - x > 0$ ومنه

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow y^2 - y = (y - x)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)y = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2x - 1}$$

إذن $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x - 1} \quad \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

* * * *

22

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x}}$$

1- أ- بين أن f تقابل من $]1, +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

ب- حدد f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

2- بين أن g تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.

3- ليكن g^{-1} التقابل العكسي للدالة g .

بين أن

$$\forall x \in \left]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad g^{-1}(x) = \text{Arc}\sin \frac{1}{2}x\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$$

1- أ- الدالة f تقابل

- لدينا f قابلة للاشتقاق على $]-1 , +\infty[$ لانها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-1 , +\infty[$ ولأن $\sqrt{1+x} \neq 0$ $\quad \forall x \in]-1 , +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]-1 , +\infty[$. لدينا

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$

$$= \frac{2(1+x) - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$

ومنه $\quad \forall x \in]-1 , +\infty[\quad f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]-1 , +\infty[$

- وبما أنها متصلة على $]-1 , +\infty[$ (لانها قابلة للاشتقاق على $]-1 , +\infty[$) فإن f تقابل من $]-1 , +\infty[$ نحو المجال I.

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x}{\sqrt{1+x}} = -\infty$$

ومنه $I =]-\infty , +\infty[$

إذن f تقابل من $]-1 , +\infty[$ نحو IR.

ب- تحديد التقابل العكسي للتقابل f

ليكن x عنصرا من IR و y عنصرا من $]-1 , +\infty[$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1+y}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1+y} = y$$

$$\Leftrightarrow y + 1 - x\sqrt{1+y} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y+1} - \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y+1} - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{4+x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+1} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4}) \\ \text{أو} \\ \sqrt{y+1} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2+4}) \end{cases}$$

نلاحظ أن $x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$ لكل x من IR .

ومنه

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \sqrt{y+1} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4})$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2+4})^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2+4})^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x\sqrt{x^2+4})$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 + x\sqrt{x^2+4})$$

إذن $\quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x(x + \sqrt{x^2+4}) \quad \forall x \in IR$

2- الدالة g تقابل

لدينا $\quad g(x) = f(\sin x) \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ولدينا الدالة sin تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ نحو $]-1 , 1]$ وبما أن الدالة f متصلة على $]-1 , 1]$ وتزايدية قطعا على $]-1 , 1]$ لانها تزايدية قطعا على $]-1 , +\infty[$ فإن f تقابل من $]-1 , 1]$ نحو $]-\infty , f(1)]$ أي نحو $\left]-\infty , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

لدينا إذن

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin}]-1 , 1] \xrightarrow{f} \left]-\infty , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

(المركب: g)

إذن g تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ نحو $\left]-\infty , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

3- التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من $\left]-\infty , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و y عنصرا من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = f(\sin y)$$

$$\Leftrightarrow \sin y = f^{-1}(x)$$

لدينا $-\frac{\pi}{2} < y \leq \frac{\pi}{2}$ و $-1 < f^{-1}(x) \leq 1$ ومنه

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow y = \text{Arc}\sin f^{-1}(x)$$

إذن $\quad g^{-1}(x) = \text{Arc}\sin f^{-1}(x) \quad \forall x \in \left]-\infty , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

أي $\quad g^{-1}(x) = \text{Arc}\sin \frac{1}{2}x(x + \sqrt{x^2+4}) \quad \forall x \in \left]-\infty , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

* * * *

23

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sin x - 2\cos x \quad \forall x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$$

و نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} - 2x \quad \forall x \in [0, 1]$$

1- بين أن g تقابل من $[0 , 1]$ نحو مجال I يجب تحديده

2- بين أن $f(x) = g(\cos x) \quad \forall x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

3- أ- استنتج أن f تقابل من $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ نحو المجال I.

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل f

1- التقابل g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0 , 1[$

ليكن x عنصرا من $[0 , 1[$. لدينا :

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 2 = -\frac{x + 2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

وبما أن $x \geq 0$ فإن $x + 2\sqrt{1-x^2} > 0$ ومنه $g'(x) < 0$

إذن الدالة g تناقصية قطعا على $[0 , 1]$

الدالة g متصلة على $[0 , 1]$

إذن g تقابل من $[0 , 1]$ نحو المجال I حيث

$$I = [g(1) , g(0)] = [-2 , 1]$$

2- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا $\sin x \geq 0$ و $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

إذن $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

ومنه
$$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} - 2\cos x = g(\cos x)$$

إذن $f(x) = g(\cos x) \quad \forall x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

3- أ- الاستنتاج

لدينا حسب السؤال الثاني : $f = g \circ \cos$

بما أن الدالة $\cos$ تقابل من $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[0 , 1]$ وأن الدالة g تقابل من $[0 , 1]$ نحو $[-2 , 1]$ فإن f تقابل من $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[-2 , 1]$

ب- التقابل العكسي للدالة f

ليكن x عنصرا من $[-2 , 1]$ و y عنصرا من $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$. لدينا

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = g(\cos y) \Leftrightarrow \cos y = g^{-1}(x)$$

بما أن $0 \leq g^{-1}(x) \leq 1$ و $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ فإن

$$\cos y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow y = \text{Arccos}\, g^{-1}(x)$$

ومنه
$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow y = \text{Arccos}\, g^{-1}(x)$$

إذن $f^{-1}(x) = \text{Arccos}\, g^{-1}(x)$

ليكن z عنصرا من $[0, 1]$. لدينا

$$\begin{aligned}
z = g^{-1}(x) &\Leftrightarrow x = g(z) \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{1-z^2} - 2z \\
&\Leftrightarrow x + 2z = \sqrt{1-z^2} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ (x+2z)^2 = 1 - z^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ 5z^2 + 4xz = 1 - x^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ z^2 + \frac{4x}{5} z = \frac{1-x^2}{5} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ \left(z + \frac{2x}{5}\right)^2 = \frac{1-x^2}{5} + \frac{4x^2}{25} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ \left(z + \frac{2x}{5}\right)^2 = \frac{5-x^2}{25} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ z = -\frac{2x}{5} + \frac{\sqrt{5-x^2}}{5} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x + 2z \geq 0 \\ z = -\frac{2x}{5} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

اذا كان $z = -\frac{2x}{5} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{5}$ فإن

$$x + 2z = x - \frac{4x}{5} - \frac{2\sqrt{5-x^2}}{5} = \frac{x - 2\sqrt{5-x^2}}{5}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
x + 2z > 0 &\Leftrightarrow x - 2\sqrt{5-x^2} > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2} < x \\
&\Leftrightarrow 4(5-x^2) < x^2 \\
&\Leftrightarrow 20 < 5x^2 \\
&\Leftrightarrow 4 < x^2
\end{aligned}$$

وبما أن $-2 \leq x \leq 1$ فإن $x^2 \leq 4$ ومنه العبارة $4 \leq x^2$ خاطئة

ومنه $x + 2z \leq 0$

إذن
$$z = g^{-1}(x) \Leftrightarrow z = -\frac{2x}{5} + \frac{\sqrt{5-x^2}}{5}$$

ومنه
$$g^{-1}(x) = \frac{1}{5}\left(-2x + \sqrt{5-x^2}\right)$$

وبالتالي فإن
$$f^{-1}(x) = \text{Arccos}\, \frac{1}{5}\left(-2x + \sqrt{5-x^2}\right) \quad \forall x \in [-2 , 1]$$

24

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin(a+x)}$$

حيث a عدد حقيقي ينتمي الى $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

ب- بين أن f متصلة على D.

2 - ليكن g قصور الدالة f على $I =]-a, -a+\pi[$.

أ - بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل g .

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \sin(a+x) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \quad a+x \neq k\pi$$
$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \quad x \neq -a+k\pi$$

إذن $D = IR - \{-a+k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

ب- اتصال الدالة f

لدينا الدالة cos متصلة على IR ومنه cos متصلة علىD .

لدينا الدالة sin متصلة على IR و الدالة $x \to a+x$ متصلة على IR .

ومنه الدالة $x \to \sin(a+x)$ متصلة على IR و منه الدالة $x \to \sin(a+x)$ متصلة على D .

و لدينا $\forall x \in D \quad \sin(a+x) \neq 0$

إذن f متصلة علىD .

2- قصور الدالة f على I تقابل

لدينا g متصلة على I لان f متصلة علىD .

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ x > -a}} \cos x = \cos a$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ x > -a}} \sin(a+x) = 0$

ولدينا $\forall x \in I \quad 0 < x+a < \pi$

ومنه $\forall x \in I \quad \sin(a+x) > 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ x > -a}} \frac{1}{\sin(a+x)} = +\infty$

وبما أن $0 < a < \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos a > 0$ ومنه

$$\lim_{\substack{x \to -a \\ x > -a}} g(x) = +\infty$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -a+\pi \\ x < -a+\pi}} \cos x = -\cos a$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -a+\pi \\ x < -a+\pi}} \sin(a+\pi) = 0$

وبما أن $\forall x \in I \quad \sin(a+x) > 0$ فإن $\lim\limits_{\substack{x \to -a+\pi \\ x < -a+\pi}} \frac{1}{\sin(a+x)} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ x > -a}} g(x) = -\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على I.

ليكن x عنصرا من I.

لدينا $g'(x) = f'(x)$

$$= \frac{-\sin x \sin(a+x) - \cos x \cdot \cos(a+x)}{\sin^2(a+x)}$$

$$= -\frac{\cos x \cos(a+x) + \sin x \sin(a+x)}{\sin^2(a+x)}$$

$$= -\frac{\cos a}{\sin^2(a+x)}$$

ومنه $\forall x \in I \quad g'(x) < 0$

إذن g تناقصية قطعا على I.

وبالتالي فإن g تقابل من I نحو المجال J حيث

$J =]-\infty, +\infty[$ أي $J = IR$

ب- التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من IR وy عنصرا من I. لدينا

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\cos y}{\sin(a+y)}$$
$$\Leftrightarrow x\sin(a+y) = \cos y$$
$$\Leftrightarrow x(\sin a \cdot \cos y + \cos a \cdot \sin y) = \cos y$$
$$\Leftrightarrow (x\sin a - 1)\cos y = -x\cos a \cdot \sin y$$

إذا كان $x = 0$ فإن $x = g^{-1}(y) \Leftrightarrow -\cos y = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

نفترض أن $x \neq 0$ ومنه

$$x = g^{-1}(y) \Leftrightarrow \frac{x\sin a - 1}{-x\cos a} = \frac{\sin y}{\cos y}$$
$$\Leftrightarrow \tan y = \frac{1 - x\sin a}{x\cos a}$$

ونعلم أن الدالة tan تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ نحو IR ومنه

$$\exists! \ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan\alpha = \frac{1 - x\sin a}{x\cos a}$$

ولدينا $-\frac{\pi}{2} < -a < 0$ والدالة tan تزايدية قطعا على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

ومنه

$$-a < \alpha \Leftrightarrow \tan(-a) < \tan\alpha$$
$$\Leftrightarrow -\tan a < \frac{1 - x\sin a}{x\cos a}$$
$$\Leftrightarrow -\sin a < \frac{1 - x\sin a}{x}$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

إذن إذا كان $x > 0$ فإن $\alpha \in]-a , -a+\pi[$ ومنه

$$x = g^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \alpha \Leftrightarrow y = \text{Arctan}\left(\frac{1 - x\sin a}{x\cos a}\right)$$

وإذا كان $x < 0$ فإن $\alpha < -a$ وبما أن $-\frac{\pi}{2} < \alpha$ فإن

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \pi < \pi - a \quad \text{ومنه} \quad \alpha + \pi \in I$$

إذن إذا كان $x > 0$ فإن

$$x = g^{-1}(y) \Leftrightarrow \tan y = \tan(\alpha + \pi) \Leftrightarrow y = \alpha + \pi \Leftrightarrow y = \pi + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x\sin a}{x\cos a}\right)$$

وبالتالي فإن الدالة g^{-1} معرفة بما يلي

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{1 - x\sin a}{x\cos a}\right) & ; x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 \\ \pi + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x\sin a}{x\cos a}\right) & ; x < 0 \end{cases}$$

* * * *

25

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \forall x \in IR^+$$

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا بحيث $a \neq b$

1- أ- تحقق أن $f(a^2b) - f(ab^2) = f(ab)(f(a) - f(b))$

ب- عمل مايلي :

$$X = a f(a) - 2a f(b) + f(a^2b^2)$$

2- استنتج أن

$$\frac{a f(a) - 2a f(b) + f(a^2b^2)}{f(a^2) - f(ab)} + \frac{f(a^2b) - f(ab^2)}{f(a) - f(b)} = f(a^2)$$

1-أ- التحقق من المتساوية المقترحة

لدينا

$$f(a^2b) = \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{a} = f(ab) f(a)$$

و بالمثل لدينا $f(ab^2) = f(ab) f(b)$

ومنه $f(a^2b) - f(ab^2) = f(ab)(f(a) - f(b))$

ب- التعميل المطلوب

لدينا

$$f(a^2b^2) = \sqrt[3]{a^2b^2} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^2} = (f(a))^2 (f(b))^2$$

ولدينا $a = (f(a))^3$ ومنه

$$X = (f(a))^3 f(a) - 2(f(a))^3 f(b) + (f(a))^2 (f(b))^2$$
$$= (f(a))^2 [(f(a))^2 - 2 f(a) f(b) + (f(b))^2]$$
$$= (f(a))^2 (f(a) - f(b))^2$$

إذن

$$X = [f(a)(f(a) - f(b))]^2$$

2- الاستنتاج

حسب السؤال الاول الجزء ب منه ، لدينا

$$\frac{a f(a) - 2a f(b) + f(a^2b^2)}{f(a^2) - f(ab)} = \frac{[f(a)(f(a) - f(b))]^2}{f(a^2) - f(ab)}$$

ولدينا

$$f(a^2) = \sqrt[3]{a^2} = (f(a))^2$$
$$f(ab) = f(a) f(b)$$

ومنه

$$\frac{a f(a) - 2a f(b) + f(a^2b^2)}{f(a^2) - f(ab)} = \frac{[f(a)(f(a) - f(b))]^2}{(f(a))^2 - f(a) f(b)}$$
$$= \frac{(f(a))^2 (f(a) - f(b))^2}{f(a)(f(a) - f(b))}$$
$$= f(a)(f(a) - f(b))$$
$$= (f(a))^2 - f(a) f(b)$$

وحسب السؤال الاول الجزء أ منه لدينا

$$\frac{f(a^2b) - f(ab^2)}{f(a) - f(b)} = \frac{f(ab)(f(a) - f(b))}{f(a) - f(b)} = f(ab)$$

إذن

$$\frac{a f(a) - 2a f(b) + f(a^2b^2)}{f(a^2) - f(ab)} + \frac{f(a^2b) - f(ab^2)}{f(a) - f(b)} = (f(a))^2 = f(a^2)$$

* * * *

26

لتكن الدالة العددية f المعرفة في $]0 , +\infty[$ كما يلي

$$f(x) = \sqrt[n]{x^{n-1}} \qquad (n \in IN^* - \{1\})$$

1- بين أن مهما يكن x من $]0 , 1[$ فإن $x < f(x)$

2- استنتج أنه مهما يكن a و b من $]0 , +\infty[$ فإن

$$f(a + b) < f(a) + f(b)$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]0 , 1[$

لدينا $0 < x < 1$ ومنه $0 < x^n < x^{n-1}$

إذن $\sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{x^{n-1}}$ أي $x < \sqrt[n]{x^{n-1}}$

لان $\sqrt[n]{x^n} = x$

بمعنى أن $x < f(x)$

2- الاستنتاج

ليكن a و b عنصرين من $]0 , +\infty[$

لدينا $0 < a < a + b$

ومنه $0 < \frac{a}{a+b} < 1$

وحسب السؤال الاول يكون لدينا $\frac{a}{a+b} < f\left(\frac{a}{a+b}\right)$

و بالمثل نبين أن $\frac{b}{a+b} < f\left(\frac{b}{a+b}\right)$

إذن $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} < f\left(\frac{a}{a+b}\right) + f\left(\frac{b}{a+b}\right)$

أي $1 < f\left(\frac{a}{a+b}\right) + f\left(\frac{b}{a+b}\right)$

لدينا
$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1}}$$
$$= \sqrt[n]{\frac{a^{n-1}}{(a+b)^{n-1}}}$$
$$= \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{(a+b)^{n-1}}}$$
$$= \frac{f(a)}{f(a+b)}$$

و بالمثل نبين أن $f\left(\frac{b}{a+b}\right) = \frac{f(b)}{f(a+b)}$

إذن $1 < \frac{f(a)}{f(a+b)} + \frac{f(b)}{f(a+b)}$

ومنه $f(a+b) < f(a) + f(b)$ مع العلم أن $f(a+b) > 0$

* * * *

27

احسب النهايات التالية

1- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$

2- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$

3- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^2+x+1} - x$ $(n \in IN$ و $n > 2)$

4- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x^2+1} + x$ $(n \in IN$ و $n > 2)$

1- حساب النهاية الاولى

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من $]-8 , +\infty[$ نضع $t = \sqrt[3]{x+8}$

ويكون لدينا $t^3 = x + 8$ أي $x = t^3 - 8$

ومنه
$$\frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} = \frac{t-2}{t^3-8}$$
$$= \frac{t-2}{(t-2)(t^2+2t+4)}$$
$$= \frac{1}{t^2+2t+4}$$

إذن $\frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} = f(\sqrt[3]{x+8})$

حيث f هي الدالة المعرفة بما يلي
$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+4}$$

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x+8} = 2$ و f متصلة في 2 ومنه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} = \lim_{x \to 2} f(x)$$
$$= f(2)$$
$$= \frac{1}{12}$$

2- حساب النهاية الثانية

لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من $]-1 , +\infty[$. لدينا :

$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x}$$

نضع $t = \sqrt[3]{x+1}$ ومنه $x = t^3 - 1$

إذن
$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \frac{t-1}{t^3-1}$$
$$= \frac{1}{t^2+t+1}$$

ومنه
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{1}{t^2+t+1}$$
$$= \frac{1}{3}$$

نضع $u = \sqrt[4]{x+1}$ ومنه $x = u^4 - 1$

اذن
$$\frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} = \frac{u-1}{u^4-1}$$
$$= \frac{u-1}{(u^2-1)(u^2+1)}$$
$$= \frac{1}{(u+1)(u^2+1)}$$

ومنه
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} = \lim_{u \to 1} \frac{1}{(u+1)(u^2+1)}$$
$$= \frac{1}{4}$$

وبالتالي فإن
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{12} .$$

3- حساب النهاية الثالثة

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا
$$\sqrt[n]{x^2+x+1} - x = x\left(\frac{\sqrt[n]{x^2+x+1}}{x} - 1\right)$$
$$= x\left(\sqrt[n]{\frac{x^2+x+1}{x^n}} - 1\right)$$

لدينا
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^n}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-2}}$$
$$= 0$$

لان $n - 2 > 0$.

ومنه
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{x^2+x+1}{x}} - 1 = -1$$

إذن
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^2+x+1} - x = -\infty$$

4- حساب النهاية الرابعة

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من IR_-^* . لدينا

$$\sqrt[n]{x^2+1} + x = \sqrt[n]{x^2+1} - (-x)$$
$$= -x\left(\frac{\sqrt[n]{x^2+1}}{-x} - 1\right)$$
$$= -x\left(\sqrt[n]{\frac{x^2+1}{(-x)^n}} - 1\right)$$

لدينا
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{(-x)^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(-x)^n}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(-x)^{n-2}}$$
$$= 0$$

إذن
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x^2+1} + x = -\infty$$

* * * *

28

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$f(x) = \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{x} \qquad \forall x \in]0, 1[$$

1- بين أن $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ $(\forall x \in]0, 1[)$

2- ليكن x عنصرا من]0 , 1[

بين أن $x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2f(x))$

3- استنتج أن $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,cos}(1 - 2x)$ $\quad \forall x \in]0, 1[$

1- اثبات النتيجة المقترحة

نعلم أن $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arc\,sin} X \leq \frac{\pi}{2}$ لكل X من [-1 , 1]

ومنه $f(x) < \frac{\pi}{2}$ $\quad \forall x \in]0, 1[$

ليكن x عنصرا من]0 , 1[

لدينا $\sqrt{x} > 0$ وبما أن الدالة Arcsin تزايدية قطعا على [-1 , 1] فإن -Arc
$\sin\sqrt{x} > \sin 0$ أي $f(x) > 0$

إذن $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ $\quad \forall x \in]0, 1[$

2- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $0 \leq f(x) < \frac{\pi}{2}$ و $f(x) = \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}$

ومنه $\sqrt{x} = \sin f(x)$

إذن $x = \sin^2 f(x)$
$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2f(x))$$

3- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من]0 , 1[

لدينا حسب السؤال السابق

$x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2f(x))$ أي $\cos 2f(x) = 1 - 2x$

وبما أن $0 < 2f(x) < \pi$ فإن $2f(x) = \operatorname{Arccos}(1 - 2x)$

أي $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(1 - 2x)$

إذن $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(1 - 2x)$ $\quad \forall x \in]0 ; 1[$

* * * *

29

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a^2 + b^2 \leq 1$

نضع $\alpha = \operatorname{Arcsin} a$ و $\beta = \operatorname{Arcsin} b$

1- أ- بين أن $\cos(a+b) + \cos(a-b) \geq 0$

ب- بين أن $\cos(a+b)\cos(a-b) \geq 0$

ج - استنتج أن $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$

2- بين أن $\sin(\alpha+\beta) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

3- استنتج أن

$$\operatorname{Arc\,sin}(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) = \operatorname{Arc\,sin} a + \operatorname{Arc\,sin} b$$

1-أ- اثبات المتفاوتة الاولى

لدينا $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

ومنه $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

وبما أن $\alpha = \text{Arcsin } a$ فإن $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ومنه $\cos\alpha \ge 0$

و بالمثل لدينا $\cos\beta \ge 0$

إذن $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \ge 0$

ب- اثبات المتفاوتة الثانية

لدينا $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta)^2 - (\sin\alpha\sin\beta)^2$

$= (1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta) - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

بما أن $\alpha = \text{Arcsin } a$ فإن $\sin\alpha = a$

وبالمثل لدينا $\sin\beta = b$

إذن $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = (1-a^2)(1-b^2) - a^2b^2$

$= 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 - a^2b^2$

$= 1 - (a^2+b^2)$

وبما أن $a^2+b^2 \le 1$ فإن $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) \ge 0$

ج- الاستنتاج

لدينا $\alpha = \text{Arcsin } a$ ومنه $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

وبالمثل لدينا $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

ومنه $-\pi \le \alpha+\beta \le \pi$

ولكي نبين أن $-\frac{\pi}{2} \le \alpha+\beta \le \frac{\pi}{2}$ يكفي أن نبين أن $\cos(\alpha+\beta) \ge 0$

لدينا $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \ge 0$ ومنه $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ لهما نفس الاشارة ، وبما أن $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \ge 0$ فإن $\cos(\alpha+\beta) \ge 0$

إذن $-\frac{\pi}{2} \le \alpha+\beta \le \frac{\pi}{2}$

2- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

وبما أن $\alpha = \text{Arcsin } a$ فإن $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ و $a = \sin\alpha$

ومنه $\cos\alpha \ge 0$ و $a = \sin\alpha$

إذن $a = \sin\alpha$ و $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$

وبالمثل لدينا $b = \sin\beta$ و $\cos\beta = \sqrt{1-b^2}$

ومنه $\sin(\alpha+\beta) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

3- الاستنتاج

لدينا
$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha+\beta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ومنه $\alpha+\beta = \text{Arc sin}(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})$

وبالتالي فإن : $\text{Arc sin}(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) = \text{Arcsin } a + \text{Arcsin } b$

30

ليكن a و b عنصرين من $[-1, 1]$.

نضع $\alpha = \text{Arcsin } a$ و $\beta = \text{Arccos } b$

1- أ- بين أن $\cos(\alpha+\beta) = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$

ب- استنتج أن

$$\cos(\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

2- نفترض أن $a \in]-1, 1[$ وأن $b \in]-1, 1] - \{0\}$

بين أن $a = b \Leftrightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

3- تطبيق : حل في IR^2 النظمة التالية

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \text{Arc cos } y - \text{Arc sin } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

لدينا $\alpha = \text{Arcsin } a$ ومنه $a = \sin\alpha$

و بالمثل لدينا $b = \cos\beta$ ومنه $\cos(\alpha+\beta) = b\cos\alpha - a\sin\beta$

وبما أن $0 \le \text{Arccos } b \le \pi$ فإن $\sin(\text{Arccos } b) \ge 0$

ومنه $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$

$= \sqrt{1-b^2}$

وبما أن $-\frac{\pi}{2} \le \text{Arcsin } a \le \frac{\pi}{2}$ أي $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos\alpha \ge 0$

ومنه $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$= \sqrt{1-a^2}$

إذن $\cos(\alpha+\beta) = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$

ب- الاستنتاج

لدينا $\cos(\alpha+\beta) = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$ ومنه

$$\cos(\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab \ge 0 \\ b^2(1-a^2) = a^2(1-b^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab \ge 0 \\ a^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

2- اثبات التكافؤ المقترح

لدينا $-\frac{\pi}{2} \le \text{Arcsin } a \le \frac{\pi}{2}$

وبما أن $a \notin \{-1, 1\}$ فإن $-\frac{\pi}{2} < \text{Arcsin } a < \frac{\pi}{2}$

أي $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

لدينا $0 \le \text{Arccos}\, b \le \pi$

وبما أن $b \notin \{-1 , 0\}$ فإن $0 < \text{Arccos}\, b < \pi$

أي $0 < \beta < \pi$

ومنه $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$

ومنه $\cos(\alpha + \beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \quad a = b$

3- تطبيق

ليكن (x , y) عنصرا من $[-1 , 1]^2$. لدينا

$$\text{Arccos}\, y - \text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\, y + \text{Arcsin}\,(-x)$$

لان الدالة Arcsin فردية

- إذا كان $x \notin \{-1 , 1\}$ و $y \notin \{-1 , 0\}$ فإنه حسب السؤال الثاني

لدينا $-x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{Arccos}\, y - \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$

ومنه اذا كان $x \notin \{-1 , 1\}$ و $y \notin \{-1 , 0\}$ فإن

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \text{Arccos}\, y - \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x , y) = \left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)$$

- إذا كان $x \in \{-1 , 1\}$ و $y \in \{-1 , 0\}$ فإن

$x - y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ و $y = 0$

إذن النظمة المقترحة تكافيء

$$\begin{cases} (x , y) = (1 , 0) \\ \text{Arccos}\, 1 - \text{Arcsin}\, 0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

وهذا غير ممكن لان $\text{Arccos}\, 1 = 0$ و $\text{Arcsin}\, 0 = 0$

- وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه النظمة هي

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

* * * *

31

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1- بين أن $0 < f(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

2- ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

أ- بين أن $1 - \tan^2 f(x) = 2x \tan f(x)$

ب- استنتج أن $x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2 f(x)\right)$

3- استنتج أن $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\, x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

1- اثبات النتيجة المقترحة

نعلم أنه مهما يكن X من $\mathbb{R}$ فإن $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\, X < \frac{\pi}{2}$

ومنه $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

ونعلم أنه مهما يكن X من $\mathbb{R}_+^*$ فإن $\text{Arctan}\, X > 0$ وأنه مهما يكن x من $\mathbb{R}_-^*$ فإن $\text{Arctan}\, X < 0$. لهذا يكفي أن نبين أن

$$\sqrt{1 + x^2} - x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

لدينا $|x| < \sqrt{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ومنه

$$x < \sqrt{1 + x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

علما أن $x \le |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

إذن $\sqrt{1 + x^2} - x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

ومنه $f(x) > 0$

وبالتالي فإن $0 < f(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

2-أ- اثبات المتساوية الاولى

لدينا $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{1 - x^2} - x\right)$ و $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$

ومنه $\tan f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$

أي $x + \tan f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

إذن $x^2 + 2x \tan f(x) + \tan^2 f(x) = 1 + x^2$

أي $2x \tan f(x) = 1 - \tan^2 f(x)$

ب- الاستنتاج

لدينا $2x \tan f(x) = 1 - \tan^2 f(x)$ ومنه $x = \frac{1 - \tan^2 f(x)}{2 \tan f(x)}$

اذا كان $x \neq 0$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{2 \tan f(x)}{1 - \tan^2 f(x)}$

$$= \tan(2 f(x))$$

ومنه $x = \frac{1}{\tan 2 f(x)}$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2 f(x)\right)$$

إذا كان $x = 0$ فإن $f(x) = \text{Arctan}\, 1$ أي $f(x) = \frac{\pi}{2}$ ومنه

$$0 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2 f(0)\right)$$

إذن $x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2 f(x)\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

3- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

حسب السؤال السابق لدينا : $x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2 f(x)\right)$

وبما أن $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ فإن $-\pi < -2f(x) < 0$

ومنه $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2f(x) < \frac{\pi}{2}$

إذن $\frac{\pi}{2} - 2f(x) = \text{Arctan}\, x$ أي $2f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, x$

بمعنى أن $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\, x$

وبالتالي فإن $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\, x \quad \forall x \in IR$

* * * *

32

لتكن الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = 2\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad \forall x \in]-1, 1]$$

1- بين أن $0 \leq f(x) < \pi \quad \forall x \in]-1, 1]$

2- ليكن x عنصرا من $]-1, 1]$

أ- بين أن $1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x\left(1 + \tan^2\frac{f(x)}{2}\right)$

ب- استنتج أن $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$

3- استنتج أنه مهما يكن x من $]-1, 1]$ فإن

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]-1, 1]$

نعلم أنه مهما يكن X من IR فإن $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\, X < \frac{\pi}{2}$

ومنه $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\pi}{2}$

إذن $-\pi < f(x) < \pi$

ولدينا $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 0$ وبما أن الدالة Arctan تزايدية قطعا على IR

فإن $\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq \text{Arctan}\, 0$ أي $f(x) \geq 0$

إذن $0 \leq f(x) < \pi \quad \forall x \in]-1, 1]$

2- أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $f(x) = 2\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ومنه $\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{f(x)}{2}$

ولدينا $0 < f(x) < \pi$ ومنه $0 < \frac{f(x)}{2} < \frac{\pi}{2}$

إذن $\tan\left(\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \tan\left(\frac{f(x)}{2}\right)$

أي $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \tan\left(\frac{f(x)}{2}\right)$

إذن $\frac{1-x}{1+x} = \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)$ أي $1 - x = \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) + x\tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)$

ومنه $1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x\left(1 + \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)\right)$

ب- الاستنتاج الاول

حسب السؤال السابق لدينا :

$$1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x\left(1 + \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)\right)$$

نضع $y = \frac{f(x)}{2}$ ويكون لدينا $1 - \tan^2 y = x(1 + \tan^2 y)$

أي $\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos^2 y} = x \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$

ومنه $x = \cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y$

إذن $x = \cos f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$

3- الاستنتاج الثاني

ليكن x عنصرا من $]-1, 1]$

لدينا $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$

ولدينا $0 \leq f(x) < \pi$ أي $-\pi \leq -f(x) < 0$

ومنه $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - f(x) \leq \frac{\pi}{2}$

وبما أن الدالة sin تقابل من $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[-1, 1]$ فإن

$$\frac{\pi}{2} - f(x) = \text{Arcsin}\, x$$

ومنه $f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x$

* * * *

33

1- بين أن $\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) = 2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$ ؛

2- احسب ما يلي $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$

1- اثبات المتساوية المقترحة

نضع $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

لدينا $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

ولدينا $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ومنه $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$

$= \tan\beta$

بما أن $1 < \frac{1}{2} < 0$ وأن الدالة Arctan تزايدية قطعا فإن

$\text{Arctan}\,0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{2} < \text{Arctan}\,1$ أي $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

ومنه $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ ولدينا $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

وبما أن الدالة tan تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ نحو IR فإن $2\alpha = \beta$

إذن $\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) = 2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$

2- حساب القيمة المطلوبة

نضع $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$

لدينا $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

وبما أن $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ و $\tan\beta = \frac{1}{5}$ فإن

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

وبما أن $1 < \frac{1}{2} < 0$ و $1 < \frac{1}{5} < 0$ وأن الدالة Arctan تزايدية قطعا على IR فإن:

$\text{Arctan}\,0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \text{Arctan}\,\frac{\pi}{4}$ أي $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$\text{Arctan}\,0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \text{Arctan}\,\frac{\pi}{4}$ أي $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$

ومنه $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ إذن $\alpha+\beta = \text{Arctan}\,\frac{7}{9}$

نضع $X = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$

لدينا إذن $X = \text{Arctan}\,\frac{7}{9} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$

نضع $a = \text{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)$ و $b = \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$

لدينا $\tan(X) = \tan(a+b)$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \,.\, \tan b} = \frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{72}} = 1$$

وبما أن $1 < \frac{7}{9} < 0$ و $1 < \frac{1}{8} < 0$ فإن

$\text{Arctan}\,0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{8} < \text{Arctan}\,1$

و $\text{Arctan}\,0 < \text{Arctan}\,\frac{7}{9} < \text{Arctan}\,1$

أي $0 < a < \frac{\pi}{4}$ و $0 < b < \frac{\pi}{4}$ ومنه $0 < X < \frac{\pi}{2}$

إذن $X = \frac{\pi}{4}$

أي $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

* * * *

34

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $ab < 1$

1- نضع $a = \text{Artan}\,a$ و $b = \text{Arctan}\,b$

بين أن $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$

2- بين أن $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

1- اثبات المتفاوتة المزدوجة

لدينا $\alpha = \text{Arctan}\,a$ ومنه $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

و بالمثل لدينا $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

إذن $-\pi < a+b < \pi$

لكي نبين أن $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ يكفي أن نبين أن $\cos(\alpha+\beta) > 0$

لدينا $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \cos\alpha\cos\beta\,(1 - \tan\alpha\tan\beta)$

وبما أن $\alpha = \text{Arctan}\,a$ و $\beta = \text{Arctan}\,b$ فإن $\tan\alpha = a$ و $\tan\beta = b$

ومنه $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta\,(1 - ab)$

وبما أن $ab < 1$ فإن $1 - ab > 0$

ولدينا $\cos\alpha > 0$ و $\cos\beta > 0$ لأن $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

إذن $\cos(\alpha+\beta) > 0$

وبالتالي فإن $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$

2- اثبات النتيجة المقترحة

نضع $\alpha = \text{Arctan}\,a$ و $\beta = \text{Arctan}\,b$

لدينا $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

ولدينا $a = \tan\alpha$ و $b = \tan\beta$ ومنه $\tan(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{1-ab}$

وحسب السؤال السابق لدينا $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha+\beta = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

أي $\text{Arctan}\,a + \text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

35

ليكن x و y عنصرين من IR

1 - بين أنه إذاكان $y \geq 0$ فإن

$$\text{Arctan}(x-y) \leq \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$$

ب- بين أنه إذا كان $y \leq 0$ فإن

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \leq \text{Arctan}(x-y)$$

2 - أ- بين أن $|\text{Arctan}\, z| = \text{Arctan}\, |z| \quad \forall z \in IR$

ب- استنتج أن

$$\text{Arctan}\,|x-y| \leq \text{Arctan}\,|x| + \text{Arctan}\,|y|$$

1-أ- اثبات المتفاوتة الاولى

لدينا $y \geq 0$ ومنه $x - y \leq 0$

وبما ان الدالة Arctan تزايدية قطعا على IR فإن

$$\text{Arctan}(x-y) \leq \text{Arctan}\, x$$

وبما أن $y \geq 0$ فإن $\text{Arctan}\, y \geq 0$ ومنه

$$\text{Arctan}\, x \leq \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$$

إذن $\quad \text{Arctan}(x-y) \leq \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$

ب- اثبات المتفاوتة الثانية

لدينا $y \leq 0$ ومنه $-y \geq 0$ أي $x - y \geq x$

وبما أن الدالة Arctan تزايدية قطعا على IR فإن

$$\text{Arctan}(x-y) \geq \text{Arctan}\, x$$

وبما أن $y \leq 0$ فإن $\text{Arctan}\, y \leq 0$ ومنه

$$\text{Arctan}\, x \geq \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$$

إذن $\quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \leq \text{Arctan}(x-y)$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن z عنصرا من IR.

اذا كان $z \geq 0$ فإن $\text{Arctan}\, z \geq 0$

ومنه $\quad \text{Arctan}\,|z| = \text{Arctan}\, z$

$$= |\text{Arctan}\, z|$$

اذا كان $z \leq 0$ فإن $\text{Arctan}\, z \leq 0$

ومنه $\quad |\text{Arctan}\, z| = -\text{Arctan}\, z$

$$= \text{Arctan}\,(-z)$$

لان الدالة Arctan فردية

إذن $\quad |\text{Arctan}\, z| = \text{Arctan}\,|z|$

وبالتالي فإن $\quad |\text{Arctan}\, z| = \text{Arctan}\,|z| \quad \forall z \in IR$

ب- الاستنتاج

إذا كان $y \geq 0$ فإنه حسب السؤال الاول لدينا

$$\text{Arctan}(x-y) \leq \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$$

أي $\quad \text{Arctan}(x-y) - \text{Arctan}\, x \leq \text{Arctan}\, y$

بمعنى أن $\quad \text{Arctan}(x-y) - \text{Arctan}\, x \leq \text{Arctan}\,|y|$

إذا كان $y \leq 0$ فإنه حسب السؤال الاول لدينا

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \leq \text{Arctan}(x-y)$$

أي $\quad \text{Arctan}\, y \leq \text{Arctan}(x-y) - \text{Arctan}\, x$

وبما أن الدالة Arctan فردية فإن

$$\text{Arctan}\, y = -\text{Arctan}(-y)$$

$$= -\text{Arctan}\,|y|$$

إذن $\quad -\text{Arctan}\,|y| \leq \text{Arctan}(x-y) - \text{Arctan}\, x$

ومنه $\quad -\text{Arctan}\,|y| \leq \text{Arctan}(x-y) - \text{Arctan}\, x \leq \text{Arctan}\,|y|$

أي $\quad |\text{Arctan}(x-y) - \text{Arctan}\, x| \leq \text{Arctan}\,|y|$

ونعلم أن $\quad |X| - |Y| \leq |X - Y| \quad \forall (X, Y) \in IR$

ومنه $\quad |\text{Arctan}(x-y)| - |\text{Arctan}\, x| \leq \text{Arctan}\,|y|$

وحسب السؤال الثاني الجزء أ منه يكون لدينا

$$\text{Arctan}\,|x-y| - \text{Arctan}\,|x| \leq \text{Arctan}\,|y|$$

أي $\quad \text{Arctan}\,|x-y| \leq \text{Arctan}\,|x| + \text{Arctan}\,|y|$

* * * *

36

احسب النهايات التالية :

-1 $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}}{x^2 - 1}$

-2 $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Arctan}\sqrt{1-x^2}}{x - 1}$

-3 $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x\, \text{Arcsin}\frac{1}{x}$

-4 $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x\, \text{Arccos}\frac{1}{x} - x$

1- حساب النهاية الاولى

لدينا $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$ و $\displaystyle \lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$

ومنه لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من]0 , 1[. لدينا

$$\frac{\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}}{x^2 - 1} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}}{x - 1}$$

لدينا $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = +\infty$

و $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

إذن $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}}{x^2 - 1} = +\infty$

2- حساب النهاية الثانية

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \operatorname{Arctan} \sqrt{1-x^2} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \operatorname{Arctan} X = 0$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x-1) = 0$$

إذن لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة.

ليكن x عنصرا من $]0 , 1[$.

لدينا
$$\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \frac{\operatorname{Arctan} X}{X}$$
$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{t}{\tan t}$$
$$= 1$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} -\sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$= -\infty$$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\infty$$

3- حساب النهاية الثالثة

لدينا
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} = \lim_{X \to 0} \operatorname{Arcsin} X$$
$$= 0$$

ومنه لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من $]1 , +\infty[$.

نضع $t = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x}$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ ومنه $x = \frac{1}{\sin t}$

إذن
$$x \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} = \frac{t}{\sin t}$$

ومنه
$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t}$$
$$= 1$$

4- حساب النهاية الرابعة

لدينا
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arccos} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X<0}} \operatorname{Arccos} X$$
$$= \operatorname{Arccos} 0$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

إذن
$$\lim_{x \to -\infty} x \operatorname{Arccos} \frac{1}{x} = -\infty$$

ومنه لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من $]-\infty , -1[$.

نضع $t = \operatorname{Arccos} \frac{1}{x}$ $\left(\frac{\pi}{2} < t < \pi\right)$ ومنه $\cos t = \frac{1}{x}$

إذن
$$x \operatorname{Arccos} \frac{1}{x} - x = \frac{t}{\cos t} - \frac{1}{\cos t}$$
$$= \frac{t-1}{\cos t}$$

ومنه
$$\lim_{x \to -\infty} x \operatorname{Arccos} \frac{1}{x} - x = \lim_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t > \frac{\pi}{2}}} \frac{t-1}{\cos t}$$
$$= -\infty$$

لان $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} (t-1) = \frac{\pi}{2} - 1$ و $\lim_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t > \frac{\pi}{2}}} \cos t = 0$

و $\forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\quad \cos t < 0$

2 - المتتاليات العددية

- المتتاليات الحسابية
- المتتاليات الهندسية
- المتتاليات المصغورة والمكبورة والمحدودة
- رتابة متتالية
- نهاية متتالية

مصادق التقارب والعمليات على النهايات

- تقارب متتالية تزايدية ومكبورة

تقارب متتالية تناقصية ومصغورة

- المتتاليات المتحادية
- دراسة المتتاليات (u_n) بحيث $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$
- دراسة المتتاليات (u_n) بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث f دالة متصلة على مجال I و $f(I) \subset I$

1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$u_n = n^2 - 5n + 6 \qquad \forall n \in IN$$

1- أحسب u_0 و u_1 و u_2

2- حدد قيم n بحيث $2 \leq |u_n| \leq 6$

3- حدد قيم n بحيث $u_{n+1} > u_n$

1- حساب القيم الثلاث

* لدينا $u_0 = 0^2 - 5.0 + 6 = 6$

* لدينا $u_1 = 1^2 - 5.1 + 6 = 2$

* لدينا $u_2 = 2^2 - 5.2 + 6 = 0$

2- تحديد قيم n لكي يكون $2 \leq |u_n| \leq 6$

لدينا

$$2 \leq |u_n| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} u_n^2 - 36 \leq 0 \\ u_n^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} u_n^2 - 36 &= (u_n - 6)(u_n + 6) \\ &= (n^2 - 5n + 6 - 6)(n^2 - 5n + 6 + 6) \\ &= (n^2 - 5n)(n^2 - 5n + 12) \\ &= n(n-5)(n^2 - 5n + 12) \end{aligned}$$

لدينا $n^2 - 5n + 12 > 0 \quad \forall n \in IN$ ومنه

$$u_n^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow n(n-5) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 5$$

وبما أن $n \in IN$ فإن :

$$u_n^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

لدينا

$$\begin{aligned} u_n^2 - 4 &= (u_n - 2)(u_n + 2) \\ &= (n^2 - 5n + 4)(n^2 - 5n + 8) \\ &= (n-1)(n-4)(n^2 - 5n + 8) \end{aligned}$$

وبما أن $n^2 - 5n + 8 > 0$ فإن

$$u_n^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)(n-4) \geq 0 \Leftrightarrow n \in [0, 1] \cup [4, +\infty[$$

وبما أن $n \in IN$ فإن

$$u_n^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow n \in IN - \{2, 3\}$$

إذن

$$2 \leq |u_n| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ n \in IN - \{2, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{0, 1, 4, 5\}$$

ومنه فإن مجموعة قيم n بحيث هي $2 \leq |u_n| \leq 6$ هي $S = \{0, 1, 4, 5\}$

3- تحديد قيم n لكي يكون $u_{n+1} > u_n$

لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 - 5(n+1) + 6 \\ &= n^2 - 5n + 2n + 1 - 5 + 6 \\ &= u_n + 2n - 4 \end{aligned}$$

ومنه

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow u_n + 2n - 4 > u_n \Leftrightarrow 2n - 4 > 0 \Leftrightarrow n > 2$$

إذن مجموعة قيم n بحيث $u_{n+1} > u_n$ هي

$$S' = IN^* - \{1, 2\}$$

* * * *

2

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 5}{u_n - 1} \qquad \forall n \in IN$$

1- أ- ليكن n عنصرا من IN.

حدد u_{n+2} بدلالة u_n

ب- استنتج أن (u_n) دورية و2 دور لها.

2- ليكن n عنصرا من IN.

احسب u_{2n} و u_{2n+1}

3- حدد قيمة u_{603}

1- تحديد الحد u_{n+2}

لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{u_{n+1} - 5}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{\frac{u_n - 5}{u_n - 1} - 5}{\frac{u_n - 5}{u_n - 1} - 1} \\ &= \frac{u_n - 5 - 5u_n + 5}{u_n - 5 - u_n + 1} \\ &= \frac{-4u_n}{-4} \\ &= u_n \end{aligned}$$

إذن، $u_{n+2} = u_n$

ب- الاستنتاج

لدينا حسب السؤال الاول : $u_{n+2} = u_n \quad \forall n \in IN$

إذن (u_n) دورية و 2 دور لها

2- حساب القيمتين u_{2n} و u_{2n+1}

لدينا (u_n) دورية و 2 دور لها ومنه $u_{0+2n} = u_0 \quad \forall n \in IN$

ولدينا $\quad u_{1+2n} = u_1 \quad \forall n \in IN$

إذن $\quad u_{2n} = u_0 = 2$ و $u_{2n+1} = u_1 = -3$

3- تحديد القيمة u_{603}

لدينا
$$603 = 602 + 1$$
$$= 1 + 2 . 301$$

ومنه $\quad u_{603} = u_1 = -3$

* * * *

3

لتكن (u_n) متتالية بحيث
$$\forall n \in IN \qquad u_0 + ... + u_n = 4n^2 - 3n$$

1- حدد الحد العام لهذه المتتالية

2- بين أنها حسابية محددا أساسها وحدها الاول

1- الحد العام لهذه المتتالية

نضع لكل n من IN : $\quad S_n = u_0 + ... + u_n$

ليكن n عنصرا من IN

لدينا
$$S_n = u_0 + ... + u_{n-1} + u_n$$
$$= S_{n-1} + u_n$$

ومنه
$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

وبما أن $S_n = 4n^2 - 3n$ و $S_{n-1} = 4(n-1)^2 - 3(n-1)$ فإن
$$u_n = 4n^2 - 3n - 4(n-1)^2 - 3(n-1)$$
$$= 4[n^2 - (n-1)^2] - 3[n - (n-1)]$$
$$= 4(n + n - 1) - 3$$
$$= 4(2n - 1) - 3$$
$$= 8n - 7$$

إذن $\quad u_n = 8n - 7 \qquad \forall n \in IN$

2- طبيعة هذه المتتالية

لدينا $\quad u_n = 8n - 7 \qquad \forall n \in IN$

ليكن n عنصرا من IN لدينا
$$u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 7 - (8n - 7)$$
$$= 8$$

إذن المتتالية (u_n) حسابية اساسها 8 وحدها الاول هو $u_0 = -7$

* * * *

4

نعتبر (u_n) متتالية حسابية أساسها r. ولتكن (S_n) المتتالية المعرفة بما يلي:
$$\forall n \in IN^* \qquad S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$$

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين مختلفين

1- بين أن $\quad S_m = S_n \iff -2u_0 = (m + n - 1)r$

2- استنتج أنه إذا كان $S_m = S_n$ فإن $S_{m+n} = 0$

1- الشرط اللازم والكافي لتساوي حدين للمتتالية (S_n)

لدينا (u_n) متتالية حسابية ومنه
$$S_n = \frac{n}{2}(u_o + u_{n-1}) \quad \text{و} \quad S_m = \frac{m}{2}(u_o + u_{m-1})$$

إذن
$$S_m = S_n \iff n(u_o + u_{n-1}) = m(u_o + u_{m-1})$$
$$\iff nu_o - mu_o = mu_{m-1} - nu_{n-1}$$
$$\iff (n - m)u_o = mu_{m-1} - nu_{n-1}$$

ولدينا (u_n) متتالية حسابية أساسها r ومنه
$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)r \quad \text{و} \quad u_{m-1} = u_0 + (m-1)r$$

ومنه
$$mu_{m-1} - nu_{n-1} = m(u_o + (m-1)r) - n(u_o + (n-1)r)$$
$$= (m - n)u_o + [m(m-1) - n(n-1)]r$$
$$= -(n - m)u_o + [(m^2 - n^2) - (m - n)]r$$
$$= -(n - m)u_o + (m - n)(m + n - 1)r$$
$$= (n - m)[-u_o - (m + n - 1)r]$$

إذن
$$S_m = S_n \iff (n - m)u_o = (n - m)(-u_o - (m + n - 1)r)$$
$$\iff u_o = -u_o - (m + n - 1)r$$
$$\iff -2u_o = (m + n - 1)r$$

2- الاستنتاج

بما أن (u_n) متتالية حسابية اساسها r فإن
$$S_{n+m} = \frac{m+n}{2}(u_o + u_{m+n-1})$$
$$u_{m+n-1} = u_o + (m + n - 1)r$$

إذا كان $S_m = S_n$ فإنه حسب السؤال الاول لدينا
$-2u_0 = (m + n - 1)r$ ومنه $u_{m+n-1} = u_0 - 2u_0$ أي $u_{m+n-1} = -u_0$

إذن $\quad u_0 + u_{m+n-1} = 0 \quad$ أي $\quad S_{m+n} = 0$

* * * *

5

لتكن (u_n) متتالية حسابية . نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة بما يلي
$$\forall n \in IN^* \qquad S_n = u_0 + ... + u_{n-1}$$

1- ليكن r اساس المتتالية (u_n).

بين أن $\quad 2S_{3n} = 3S_{2n} + 3n^2r$

2- استنتج أن $\quad S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

1- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا (u_n) متتالية حسابية ومنه
$$S_{3n} = \frac{3n}{2}(u_0 + u_{3n-1}) \quad \text{و} \quad S_{2n} = \frac{2n}{2}(u_0 + u_{2n-1})$$

ومنه $2S_{3n} - 3S_{2n} = 3n(u_0 + u_{3n-1}) - 3n(u_0 + u_{2n-1})$

$$= 3n(u_{3n-1} - u_{2n-1})$$

وبما أن r اساس المتتالية (u_n) فإن

$$u_{2n-1} = u_0 + (2n-1)r \quad \text{و} \quad u_{3n-1} = u_0 + (3n-1)r$$

ومنه $2S_{3n} - 3S_{2n} = 3n[(u_0 + (3n-1)r) - (u_0 + (2n-1)r)]$

$$= 3n(3n-1-2n+1)r$$

$$= 3n^2 r$$

إذن $2S_{3n} = 3S_{2n} + 3n^2 r$

2- الاستنتاج

لدينا (u_n) متتالية حسابية أساسها r ومنه :

$$u_{3n-1} = u_0 + (3n-1)r$$

$$= u_0 + (n-1)r + 2nr$$

$$= u_{n-1} + 2nr$$

ومنه $S_{3n} = \frac{3n}{2}(u_0 + u_{n-1} + 2nr)$

$$= 3 \cdot \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}) + 3n^2 r$$

أي $S_{3n} = 3S_n + 3n^2 r$

وبما أن $2S_{3n} = 3S_{2n} + 3n^2 r$ فإن

$$2S_{3n} - S_{3n} = (3S_{2n} + 3n^2 r) - (3S_n + 3n^2 r)$$

$$= 3(S_{2n} - S_n)$$

إذن $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

* * * *

6

لتكن $(u_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية بحيث :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = k^2 p \quad \text{و} \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = n^2 p$$

n و p و k اعداد صحيحة طبيعية معلومة غيرمنعدمة و $n \neq k$

1- بين أن $u_n - u_k = 2p(n-k)$

2- حدد اساس المتتالية (u_n) وحدها الاول

3- استنتج أن $u_1 + u_2 + \dots + u_p = p^3$

1- اثبات المتساوية المقترحة

بما أن $(u_n)_{n\in IN^*}$ حسابية فإن

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \\ u_1 + u_2 + \dots + u_k = \frac{k}{2}(u_1 + u_k) \end{cases}$$

ومنه $\frac{k}{2}(u_1 + u_k) = k^2 p$ و $\frac{n}{2}(u_1 + u_n) = n^2 p$

أي $u_1 + u_k = 2kp$ و $u_1 + u_n = 2np$

إذن $(u_1 + u_n) - (u_1 + u_k) = 2np - 2kp$

أي $u_n - u_k = 2p(n-k)$

2- أساس المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$

ليكن r أساس المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$. لدينا

$$u_k = u_1 + (k-1)r \quad \text{و} \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

ومنه $u_n - u_k = (n-1)r - (k-1)r$

$$= (n-k)r$$

وحسب السؤال الأول يكون لدينا $2p(n-k) = (n-k)r$

وبما أن $n \neq k$ فإن $r = 2p$

الحد الأول لهذه المتتالية

لدينا $u_1 + u_n = 2np$ (أنظر حل السؤال الأول)

وبما أن $(u_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية أساسها 2p فإن

$u_n = u_1 + (n-1)2p$ ومنه $2np = 2u_1 + (n-1)2p$

إذن $u_1 = p$

3- الاستنتاج

لدينا $u_1 + u_2 + \dots + u_p = \frac{p}{2}(u_1 + u_p)$

وبما أن $(u_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية أساسها 2p وحدها الأول p فإن

$u_p = p + (p-1)2p$ أي $u_p = 2p^2 - p$

إذن $u_1 + u_2 + \dots + u_p = \frac{p}{2}(p + 2p^2 - p)$

$$= p^3$$

* * * *

7

لتكن $(u_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية. نعتبر المتتالية $(S_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in IN^* \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

ليكن m و n عنصرين من IN^* مختلفتين بحيث

$$S_n = k S_m \quad (k \in IR)$$

1- أ- بين أنه إذا كان $km(m-1) - n(n-1) = 0$ فإن $u_1 = 0$

ب- نفترض أن $km(m-1) - n(n-1) \neq 0$

حدد أساس المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$

2- نفترض أن $k = \left(\frac{n}{m}\right)^2$

أ- بين أن $S_n = \frac{n^2}{2n-1} u_n$

ب- استنتج أن $(2n-1)u_m = (2m-1)u_n$

1- أ- الشرط الكافي لانعدام الحد الأول

لدينا $(u_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية ومنه :

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \quad \text{و} \quad S_m = \frac{m}{2}(u_1 + u_m)$$

وبما أن $S_n = k S_m$ فإن $n(u_1 + u_n) = km(u_1 + u_m)$

أي $(n - km) u_1 = k m u_m - n u_n$

ليكن r أساس المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$.

لدينا $u_n = u_1 + (n-1) r$ و $u_m = u_1 + (m-1) r$ ومنه

$$(n - km) u_1 = km [u_1 + (m-1) r] - n [u_1 + (n-1) r]$$

$$= (km - n) u_1 + [km(m-1) - n(n-1)] r$$

ومنه $2(n - km) u_1 = [km(m-1) - n(n-1)] r$

وبما أن $km(m-1) - n(n-1) = 0$ فإن $2(n-km) u_1 = 0$

ومنه $u_1 = 0$ أو $n - km = 0$

إذا كان $n - km = 0$ أي $k = \frac{n}{m}$ فإن

$$km(m-1) - n(n-1) = \frac{n}{m} m(m-1) - n(n-1)$$

$$= n(m-1) - n(n-1)$$

$$= n(m-n)$$

ومنه $n(m-n) = 0$ أي $m = n$ وهذا يخالف معطى التمرين :

إذن $n - km \neq 0$ ومنه $u_1 = 0$

ب- أساس المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$

ليكن r أساس هذه المتتالية

لدينا $2(n - km) u_1 = [km(m-1) - n(n-1)] r$ (أنظر حل السؤال السابق)

وبما أن $km(m-1) - n(n-1) \neq 0$ فإن

$$r = \frac{2(n - km)}{km(m-1) - n(n-1)} u_1$$

2-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $k = \left(\frac{n}{m}\right)^2$ ومنه

$$km(m-1) - n(n-1) = \frac{n^2}{m}(m-1) - n(n-1)$$

$$= \frac{n}{m}[n(m-1) - m(n-1)]$$

$$= \frac{n}{m}(m-n)$$

ومنه $km(m-1) - n(n-1) \neq 0$ وحسب السؤال الأول الجزء ب منه

لدينا أساس المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ هو

$$r = \frac{2(n - km)}{\frac{n}{m}(m-n)} u_1$$

ولدينا $n - km = n - \frac{n^2}{m^2} \cdot m$

$$= n\left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

$$= \frac{n}{m}(m-n)$$

ومنه $r = 2u_1$

وبما أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ حسابية فإن $u_n = u_1 + 2(n-1) u_1$ أي

$$u_n = (2n-1) u_1$$

ومنه $S_n = \frac{n}{2}[u_1 + (2n-1) u_1]$

$$= n^2 u_1$$

$$= \frac{n^2}{2n-1} u_n$$

ب- الاستنتاج

لدينا $S_n = \frac{n^2}{2n-1} u_n$ وبالمثل لدينا $S_m = \frac{m^2}{2m-1} u_m$

وبما أن $S_n = \left(\frac{n}{m}\right)^2 S_m$ فإن

$$\frac{n^2}{2n-1} u_n = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \frac{m^2}{2m-1} u_m$$

أي

$$\frac{u_n}{2n-1} = \frac{u_m}{2m-1}$$

ومنه $(2m-1) u_n = (2n-1) u_m$

* * * *

8

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ \forall n \in IN^* \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN \qquad a_n = u_{n+1} - \alpha u_n$$

حيث a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و α عدد حقيقي

1- نفترض أن $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

بين أن (a_n) متتالية هندسية محددا حدها الاول وأساسها.

2- استنتج الحد العام للمتتالية (u_n)

1- طبيعة المتتالية (a_n)

ليكن n عنصرا من IN.

لدينا $a_{n+1} = u_{n+2} - \alpha u_{n+1}$

$$= (u_{n+1} + u_n) - \alpha u_{n+1}$$

$$= (1 - \alpha) u_{n+1} + u_n$$

ولدينا $a_n = u_{n+1} - \alpha u_n$

ومنه $a_n + \alpha a_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(1-\alpha) u_{n+1}$

$$= -(\alpha^2 - \alpha - 1) u_{n+1}$$

وبما أن $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ فإن $a_n + \alpha a_{n+1} = 0$ أي $a_n = -\alpha a_{n+1}$

وبما أن $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ فإن $\alpha \neq 0$ ومنه $a_{n+1} = -\frac{1}{\alpha}\, a_n$

إذن $\quad a_{n+1} = -\frac{1}{\alpha}\, a_n \qquad \forall n \in IN$

ومنه (a_n) متتالية هندسية اساسها $-\frac{1}{\alpha}$ وحدها الاول $a_0 = b - \alpha a$

2- الاستنتاج

لدينا $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ هما جذرا المعادلة $X^2 - X - 1 = 0$

ومنه $\quad \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أو $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين بما يلي

$$\forall n \in IN \qquad a_n = u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, u_n$$

$$\forall n \in IN \qquad b_n = u_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, u_n$$

حسب السؤال الاول لدينا (a_n) و (b_n) متتاليتين هندسيتين اساسهما $\frac{-2}{1+\sqrt{5}}$ و $\frac{-2}{1-\sqrt{5}}$ على التوالي وحدهما الاولين هما على التوالي

$$a_0 = b - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a$$

$$b_0 = b - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, b$$

إذن

$$\forall n \in IN \qquad a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a\right)$$

$$\forall n \in IN \qquad b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, b\right)$$

ليكن n عنصرا من IN لدينا إذن :

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a\right) = u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, u_n$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, a\right) = u_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, u_n$$

ومنه

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, a\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) u_n$$

$$= -\sqrt{5}\, u_n$$

إذن

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, a\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(b - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a\right)\right]$$

9

ليكن a و b عنصرين مختلفين من IR . نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي :

$$u_0 = a \quad \text{و} \quad v_0 = b$$

$$\forall n \in IN \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{a-b}\,(a u_n + b v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{a-b}\,(b u_n + a v_n) \end{cases}$$

1- اثبت أن $\quad u_n - v_n = a - b \qquad \forall n \in IN$

2- نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in IN \qquad w_n = u_n + v_n$$

بين أن المتتالية (w_n) هندسية محددا اساسها وحدها الاول

3- حدد الحد العام لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

1- اثبات المتساوية المقترحة

ليكن n عنصرا من IN.

لدينا

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{a-b}\,(a u_n + b v_n) - \frac{1}{a-b}\,(b u_n + a v_n)$$

$$= \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}\right) u_n + \left(\frac{b}{a-b} - \frac{a}{a-b}\right) v_n$$

$$= u_n - v_n$$

إذن المتتالية $(u_n - v_n)$ ثابتة ومنه

$$\forall n \in IN \qquad u_n - v_n = u_0 - v_0$$

أي

$$\forall n \in IN \qquad u_n - v_n = a - b$$

2- طبيعة المتتالية (w_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$$

$$= \frac{1}{a-b}\,(a u_n + b v_n) + \frac{1}{a-b}\,(b u_n + a v_n)$$

$$= \frac{a+b}{a-b}\,(u_n + v_n)$$

$$= \frac{a+b}{a-b}\, w_n$$

إذن المتتالية (w_n) هندسية اساسها $\frac{a+b}{a-b}$ وحدها الاول هو

$$w_0 = u_0 + v_0 = a + b$$

3- الحد العام لكل من المتتاليتين

ليكن n عنصرا من IN.

لدينا (w_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{a+b}{a-b}$ وحدها الاول $w_0 = a + b$

ومنه

$$w_n = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n (a+b)$$

أي

$$u_n + v_n = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n (a+b)$$

ولدينا $u_n - v_n = a - b$

ومنه $$2u_n = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n (a+b) + (a-b)$$

$$= \frac{(a+b)^{n+1} + (a-b)^{n+1}}{(a-b)^n}$$

إذن $$u_n = \frac{(a+b)^{n+1} + (a-b)^{n+1}}{2(a-b)^n}$$

ومنه أيضا $$2v_n = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n (a+b) - (a-b)$$

أي $$v_n = \frac{(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1}}{2(a-b)^n}$$

* * * *

10

لتكن (u_n) متتالية اساسها α. نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة بما يلي

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} \qquad \forall n \in IN$$

1- ليكن m و n عنصرين من IN.

أ- بين أن $S_{m+n} = S_m + S_n \cdot \alpha^m$

ب- استنتج أن $S_n - S_m = \alpha^m S_n - \alpha^n S_m$

2- حدد العدد α اذا علمت أنه يوجد عنصر n من IN فردي بحيث $S_{n+1} - S_1 = 4S_n$ وأن u_0 يخالف 0.

1-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا (u_n) متتالية هندسية اساسها α وحدها الاول u_0 ومنه :

- إذا كان $\alpha = 1$ فإن $u_n = u_0 \qquad \forall n \in IN$

ومنه $S_n = n u_0 \qquad \forall n \in IN$

إذن $$S_{m+n} = (m+n) u_0$$
$$= m u_0 + n u_0$$
$$= S_m + S_n$$

أي $S_{m+n} = S_m + S_n \cdot \alpha^m$ علما أن $\alpha = 1$

- إذا كان $\alpha \neq 1$ فإن $S_n = u_0 \cdot \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \qquad \forall n \in IN$

ومنه $$S_m + S_n \cdot \alpha^m = u_0 \cdot \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} + u_0 \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \alpha^m$$

$$= \frac{u_0}{1-\alpha}(1 - \alpha^m + \alpha^m(1-\alpha^n))$$

$$= \frac{u_0}{1-\alpha}(1 - \alpha^m + \alpha^m - \alpha^{n+m})$$

$$= u_0 \cdot \frac{1-\alpha^{n+m}}{1-\alpha}$$

$$= S_{m+n}$$

إذن $S_{m+n} = S_m + S_n \cdot \alpha^m$

ب- الاستنتاج

لدينا $S_{m+n} = S_m + S_n \cdot \alpha^m$ وبالمثل نبين أن $S_{m+n} = S_n + S_m \cdot \alpha^n$

ومنه $S_{m+n} - S_{m+n} = (S_n + S_m \cdot \alpha^n) - (S_m + S_n \cdot \alpha^m)$

أي $S_n - S_m + S_m \cdot \alpha^n - S_n \cdot \alpha^m = 0$

إذن $S_n - S_m = S_n \cdot \alpha^m - S_m \cdot \alpha^n$

2- تحديد العدد α

ليكن n عنصرا من IN

إذا عوضنا m بالعدد 1 في المتساوية الاولى نجد أن

$S_{n+1} = S_1 + S_n \cdot \alpha$ أي $S_{n+1} - S_1 = S_n \cdot \alpha$ إذن

$$S_{n+1} - S_1 = 4S_n \Leftrightarrow \alpha \cdot S_n = 4S_n$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ أو } S_n = 0$$

لدينا $S_n = n u_0$ إذا كان $\alpha = 1$

و $S_n = u_0 \cdot \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ إذا كان $\alpha \neq 1$

ومنه إذا كان $\alpha = 1$ فإن $(S_n = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0)$ (لان $n \neq 0$)

إذا كان $\alpha \neq 1$ فإن $\alpha^n = 1$ أو $u_0 = 0 \Leftrightarrow S_n = 0$

$$\Leftrightarrow u_0 = 0$$

علما أن $\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha^n = 1$ (لان n فردي)

وبما أن $u_0 \neq 0$ فإن $S_n \neq 0$ ومنه

$$S_{n+1} - S_1 = 4S_n \Leftrightarrow \alpha = 4$$

* * * *

11

لتكن (a_n) متتالية هندسية حدودها غير منعدمة واساسها يخالف 1. ليكن n عنصرا من IN.

نضع $S = a_0 + ... + a_{n-1}$ و $P = a_0 \cdot ...... \cdot a_{n-1}$

$$T = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}}$$

1- ليكن α أساس المتتالية (a_n)

بين أن $\dfrac{S}{T} = a_0^2 \alpha^{n-1}$

2- استنتج أن $P^2 = \left(\dfrac{S}{T}\right)^n$

1- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا (a_n) متتالية هندسية اساسها α $(\alpha \neq 1)$ وحدها الاول a_0 ومنه

$$S = a_0 \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

ولدينا $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{\alpha}$ وحدها الاول $\frac{1}{a_0}$ ومنه

$$T = \frac{1}{a_0}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{1-\frac{1}{\alpha}}$$

أي
$$T = \frac{1}{a_0}\cdot\frac{\alpha^n-1}{\alpha^n}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$= \frac{1}{a_0\,\alpha^{n-1}}\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

إذن
$$\frac{S}{T} = a_0\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\cdot a_0\,\alpha^{n-1}\cdot\frac{1-\alpha}{1-\alpha^n}$$

أي
$$\frac{S}{T} = a_0^2\cdot\alpha^{n-1}$$

2- الاستنتاج

لدينا (a_n) متتالية هندسية اساسها α $(\alpha\neq 1)$ وحدها الاول a_0 ومنه

$$\forall n\in IN \qquad a_n = a_0\cdot\alpha^n$$

ومنه
$$P = a_0\cdot(a_0\cdot\alpha)\cdot(a_0\cdot\alpha^2)\ldots\ldots\ldots(a_0\cdot\alpha^{n-1})$$

$$= \underbrace{a_0\cdot a_0\ldots\ldots a_0}_{n\ \text{مرة}}\cdot\alpha\cdot\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}$$

$$= a_0^n\cdot\alpha^{1+2+\ldots+(n-1)}$$

ولدينا $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ ومنه $P=a_0^n\,\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}$

إذن $p^2=(a_0^2\,\alpha^{n-1})^n$ وبما أن $\frac{S}{T}=a_0^2\,\alpha^{n-1}$ فإن

$$P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$$

* * * * *

12

لتكن (u_n) متتالية هندسية. نعتبر المتتالية $(S_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n\in IN^* \qquad S_n=u_0+\ldots+u_{n-1}$$

1- ليكن α اساس المتتالية (u_n)

أ – بين أن $\quad S_{3n}-S_{2n}=(\alpha^n)^2S_n \quad \forall n\in IN^*$

ب – بين أن $\quad S_{2n}-S_n=\alpha^nS_n \quad \forall n\in IN^*$

2 استنتج أن $\quad S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2 \quad \forall n\in IN^*$

1-أ- اثبات النتيجة الاولى

ليكن n عنصرا من IN*

لدينا (u_n) متتالية هندسية أساسها α ومنه

إذا كان $\alpha=1$ فإن $S_n=n\,u_0$

وإذا كان $\alpha\neq1$ فإن $S_n=u_0\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

* نفترض أن $\alpha=1$

لدينا $S_{2n}=2n\,u_0$ و $S_{3n}=3n\,u_0$

ومنه
$$S_{3n}-S_{2n}=n\,u_0$$
$$=S_n$$

إذن $S_{3n}-S_{2n}=(\alpha^n)^2\,S_n$

* نفترض أن $\alpha\neq1$

لدينا $S_{3n}=u_0\cdot\frac{1-\alpha^{3n}}{1-\alpha}$ و $S_{2n}=u_0\cdot\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha}$

ومنه
$$S_{3n}-S_{2n}=u_0\left(\frac{1-\alpha^{3n}}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha}\right)$$

$$=u_0\cdot\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{3n}}{1-\alpha}$$

$$=u_0\cdot\alpha^{2n}\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$=\alpha^{2n}\,S_n$$

إذن $S_{3n}-S_{2n}=(\alpha^n)^2\,S_n$

وبالتالي فإن $\quad S_{3n}-S_{2n}=(\alpha^n)^2\,S_n \quad \forall n\in IN^*$

ب– اثبات النتيجة الثانية

ليكن n عنصرا من IN*.

لدينا إذا كان $\alpha=1$ فإن $S_n=n\,u_0$

إذا كان $\alpha\neq1$ فإن $S_n=u_0\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

نفترض أن $\alpha=1$

لدينا $S_n=n\,u_0$ و $S_{2n}=2n\,u_0$

ومنه
$$S_{2n}-S_n=n\,u_0$$
$$=S_n$$

إذن $S_{2n}-S_n=\alpha^n\,S_n$

* نفترض أن $\alpha\neq1$

ومنه
$$S_{2n}-S_n=u_0\cdot\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha}-u_0\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$=u_0\cdot\frac{\alpha^n-\alpha^{2n}}{1-\alpha}$$

$$=u_0\cdot\alpha^n\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$=\alpha^n\,S_n$$

وبالتالي فإن $S_{2n} - S_n = \alpha^n S_n \qquad \forall n \in IN^*$

2– الاستنتاج

ليكن n عنصرا من *IN. لدينا

$$S_{2n} - S_n = \alpha^n S_n$$

$$S_{3n} - S_{2n} = (\alpha^n)^2 S_n$$

ومنه

$$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (\alpha^n S_n)^2 = (S_{2n} - S_n)^2$$

إذن

$$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2 \qquad \forall n \in IN^*$$

* * * *

13

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in IN \quad u_{n+1} = u_n^3 + 2u_n + 2 \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي اكبر قطعا من -1.

1- ليكن n عنصرا من IN.

بين أن $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n^2 - u_n + 2)$

2-أ- بين بالترجع أن $\forall n \in IN \quad -1 < u_n$

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا

1– اثبات المتساوية المقترحة

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^3 + 2u_n + 2) - u_n$$

$$= u_n^3 + u_n + 2$$

$$= u_n^3 + 1 + (u_n + 1)$$

ولدينا $u_n^3 + 1 = (u_n + 1)(u_n^2 - u_n + 1)$ ومنه

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n^2 - u_n + 1) + (u_n + 1)$$

$$= (u_n + 1)(u_n^2 - u_n + 2)$$

إذن

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n^2 - u_n + 2)$$

2–أ– اثبات النتيجة المقترحة

من أجل n = 0. لدينا $u_n > -1$ لان $u_0 = a$ و $a > -1$

ليكن n عنصرا من IN . نفترض أن $u_n > -1$ ونبين أن $u_{n+1} > -1$

لدينا $u_n^3 > -1$ و $2u_n > -2$ ومنه $u_n^3 + 2u_n > -3$

ومنه $u_n^3 + 2u_n + 2 > -1$ أي $u_{n+1} > -1$

إذن $u_n > -1 \qquad \forall n \in IN$

ب– الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN . حسب السؤال الاول لدينا

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n^2 - u_n + 2)$$

وبما أن $u_n > -1$ و $u_n^2 - u_n + 2 > 0$ (لأن مميز المعادلة $X^2 - X + 2 = 0$ سالب قطعا ومعامل X^2 موجب) فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي $u_{n+1} > u_n$

إذن (u_n) تزايدية قطعا.

* * * *

14

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n>1}$ المعرفة بما يلي

$$u_n = \frac{n^{n+1}}{2^n n!} \qquad \forall n \in IN^* - \{1\}$$

1-أ- بين أن $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2 \qquad \forall n \in IN^*$

ب – استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n>1}$ تزايدية قطعا

2- استنتج أن $2^n n! \le n^{n+1} \qquad \forall n \in IN^* - \{1\}$

1–أ– اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من *IN. لدينا

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= C_{n+1}^0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_{n+1}^1 \left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1 + \frac{n+1}{n} + \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

ولدينا $\sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n}\right)^k > 0$ ومنه $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n}$

ومنه $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2$

إذن $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2 \qquad \forall n \in IN^*$

ب– الاستنتاج الاول

نلاحظ أن حدود هذه المتتالية موجبة قطعا.

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$. لدينا

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{n^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1) 2^n \cdot n!}{2 \cdot 2^n (n+1) n!}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

حسب السؤال السابق لدينا $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2$

ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ أي $u_{n+1} > u_n$

إذن المتتالية $(u_n)_{n>1}$ تزايدية قطعا.

2- الاستنتاج الثاني

لدينا $(u_n)_{n>1}$ تزايدية قطعا ومنه $u_n \ge u_2 \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

ولدينا $u_2 = 1$ ومنه

$$\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad \frac{n^{n+1}}{2^n\, n!} \ge 1$$

إذن $\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad n^{n+1} \ge 2^n . n!$

* * * *

15

ليكن n و m و p اعدادا صحيحة طبيعية بحيث $m + 1 \le p < n$

نضع $I = \{0, ..., n-1\}$. ونعتبر المتتالية $(u_p)_{p\in I}$ المعرفة بما يلي

$$\forall p \in I \qquad u_p = \sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} + C_{n-p}^{m+1}$$

1- ادرس رتابة المتتالية $(u_p)_{p\in I}$

2- استنتج أن $\sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-p}^{m+1}$

1- رتابة المتتالية المقترحة

ليكن p عنصرا من $I - \{n-1\}$. لدينا :

$$u_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} C_{n-k}^{m} + C_{n-p-1}^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} + C_{n-p-1}^{m} + C_{n-p-1}^{m+1}$$

ونعلم أن $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ لكل n و k من IN. بحيث $k < n$

ومنه

$$u_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} + C_{n-p}^{m+1}$$

$$= u_p$$

إذن المتتالية $(u_p)_{p\in I}$ ثابتة.

2- الاستنتاج

لدينا $(u_p)_{p\in I}$ ثابتة ومنه $u_p = u_0 \quad \forall p \in I$ ولدينا $u_0 = C_n^m + C_n^{m+1}$

$$= C_{n+1}^{m+1}$$

إذن $\sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} + C_{n-p}^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

ومنه $\sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-p}^{m+1}$

* * * *

16

ليكن n عنصرامن $IN^* - \{1\}$. نضع $I = \{0, ..., n\}$

نعتبر المتتالية $(u_p)_{p\in I}$ المعرفة بما يلي

$$\forall p \in I \qquad u_p = C_{2n+p}^{n} . C_{2n-p}^{n}$$

1- بين أن المتتالية $(u_p)_{p\in I}$ تناقصية قطعا

2- استنتج أن : أ- $C_{2n+p}^{n} . C_{2n-p}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2 \qquad (\forall p \in I)$

ب- $C_{3n}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2$

1- رتابة المتتالية المقترحة

ليكن p عنصرا من $I - \{n-1\}$. لدينا :

$$u_{p+1} = C_{2n+p+1}^{n}\, C_{2n-p-1}^{n}$$
$$= \frac{(2n+p+1)!}{n!\,(n+p+1)!} \cdot \frac{(2n-p-1)!}{n!\,(n-p-1)!}$$

$$u_p = C_{2n+p}^{n} . C_{2n-p}^{n}$$
$$= \frac{(2n+p)!}{n!\,(n+p)!} \cdot \frac{(2n-p)!}{n!\,(n-p)!}$$

ومنه

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{(2n+p+1)!}{(n+p+1)!} \cdot \frac{(n+p)!}{(2n+p)!} \cdot \frac{(2n-p-1)!}{(n-p-1)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(2n-p)!}$$

$$= \frac{2n+p+1}{n+p+1} \cdot \frac{n-p}{2n-p}$$

إذن

$$u_{p+1} < u_p \iff \frac{u_{p+1}}{u_p} < 1$$
$$\iff \frac{(2n+p+1)(n-p)}{(n+p+1)(2n-p)} < 1$$
$$\iff (2n+p+1)(n-p) < (n+p+1)(2n-p)$$
$$\iff (n+p+1)(n-p) + n(n-p) < (n+p+1)(2n-p)$$
$$\iff n(n-p) < (n+p+1)\,n$$
$$\iff n - p < n + p + 1$$
$$\iff 0 < 2p + 1$$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة فإن $u_{p+1} < u_p$.

إذن المتتالية $(u_p)_{p\in I}$ تناقصية قطعا.

2- الاستنتاج الاول

لدينا $(u_p)_{p\in I}$ تناقصية قطعا ومنه $u_p \le u_0 \quad \forall p \in I$

وبما أن $u_0 = C_{2n}^{n} . C_{2n}^{n}$ فإن

$$C_{2n+p}^{n}\; C_{2n-p}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2 \qquad \forall p \in I$$

ب- الاستنتاج الثاني

لدينا $(u_p)_{p\in I}$ تناقصية قطعا ومنه $u_n \le u_p \quad \forall p \in I$

ولدينا $u_n = C_{3n}^{n} . C_n^n$ أي $u_n = C_{3n}^{n}$ لان $C_n^n = 1$

ومنه $C_{3n}^{n} \le u_p \quad \forall p \in I$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا $C_{3n}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2$

* * * *

17

نعتبرالمتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in IN \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} a^2 \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي

1- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي $v_n = u_n - a^2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية محدد اساسها

ب- استنتج الحد العام للمتتالية (u_n)

2- حدد نهاية المتتالية (u_n)

1-أ- طبيعة المتتالية (v_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - a^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}a^2\right) - a^2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - a^2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

إذن $\forall n \in IN \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

وهذا يعني أن المتتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

ب- الحد العام للمتتالية (u_n)

لدينا (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول v_0 حيث $v_0 = -a^2$ ومنه :

$$v_n = -a^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in IN$$

وبما أن $v_n = u_n - a^2 \quad \forall n \in IN$ فإن

$$u_n = a^2 - a^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in IN$$

2- نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $u_n = a^2 - a^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in IN$

وبما أن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim a^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن $\lim u_n = a^2$

* * * *

18 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بما يلي

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$

1- ليكن n عنصرا من IN* و k عنصرا من IN بحيث $1 \le k \le n$

بين أن $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$

2- استنتج أن $\lim u_n = 0$

1- اثبات المتفاوتة المزدوجة

لدينا $1 \le k \le n$ ومنه $1 + n^2 \le n^2 + k \le n^2 + n$

إذن $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$

2- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN.

لدينا $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

وبما أن $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

فإن $\frac{n}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$

إذن $\frac{n}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1}$

و بالتالي فإن $\frac{n}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1} \quad \forall n \in IN^*$

ولدينا $\lim \frac{n}{n^2+1} = \lim \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$

لان $\lim\left(n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

وبالمثل لدينا $\lim \frac{n}{n^2+n} = 0$

إذن $\lim u_n = 0$

* * * *

19 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بما يلي

$$u_n = nq^n \quad \forall n \in IN^*$$

حيث q عدد حقيقي ينتمي الى المجال $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

1-أ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية

ب- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ متقاربة

2-أ- بين أن $n \le 2^{n-1} \quad \forall n \in IN$

ب- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$

1- رتابة المتتالية

لدينا n عنصرا من IN*.

لدينا
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)q^{n+1} - nq^n \\ &= q^n\left[(n+1)q - n\right] \\ &= nq^n\left(\frac{n+1}{n}q - 1\right) \end{aligned}$$

لدينا $nq^n > 0$ لأن $q > 0$ ومنه

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \le 0 &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n}q - 1 \le 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \le \frac{1}{q} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \le \frac{1}{q} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \le \frac{1}{q} - 1 \end{aligned}$$

لدينا $0 < q \le \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{1}{q} \ge 2$ أي $\frac{1}{q} - 1 \ge 1$

وبما أن $n \ge 1$ فإن $\frac{1}{n} \le 1$ ومنه $\frac{1}{n} \le \frac{1}{q} - 1$

إذن $u_{n+1} - u_n \le 0$ أي $u_{n+1} \le u_n$

وهذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية.

ب- المتتالية المقترحة متقاربة

- لدينا المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية
- لدينا $u_n > 0$ $\forall n \in IN^*$ أي $(u_n)_{n\in IN^*}$ مصغورة بالعدد 0.
- إذن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ متقاربة

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية ومنه $u_n \le u_1$ $\forall n \in IN^*$

أي $nq^n \le q$ $\forall n \in IN^*$

ومنه $n \le \left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}$ $\forall n \in IN^*$

إذا اخذنا $q = \frac{1}{2}$ فإننا نجد ما يلي

$n \le 2^{n-1}$ $\forall n \in IN^*$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN^*

لدينا $n \le 2^{n-1}$ ومنه $nq^n \le 2^{n-1} q^n$

أي $u_n \le \frac{1}{2}(2q)^n$

إذن $0 < u_n \le \frac{1}{2}(2q)^n$ $\forall n \in IN^*$

إذا كان $0 < q < \frac{1}{2}$ فإن $0 < 2q < 1$ ومنه $\lim (2q)^n = 0$

إذن $\lim \frac{1}{2}(2q)^n = 0$ ومنه $\lim u_n = 0$

إذا كان $q = \frac{1}{2}$ فإن $u_n = \frac{n}{2^n}$ $\forall n \in IN^*$

لدينا

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{k=3}^{n} C_n^k$$

وبما أن $\sum_{k=3}^{n} C_n^k > 0$ فإن $2^n > 1 + n + \frac{n^2 - n}{2}$

أي $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 + n + 2}$

ومنه $0 < u_n < \frac{2n}{n^2 + n + 2}$ $\forall n \in IN^*$

ولدينا $\lim \frac{2n}{n^2+n+2} = \lim \frac{2}{n + 1 + \frac{2}{n}} = 0$

لان $\lim \left(n + 1 + \frac{2}{n}\right) = +\infty$ ومنه $\lim u_n = 0$

* * * *

20

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بما يلي

$u_n = \frac{2^n}{n!}$ $\forall n \in IN^*$

1-أ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

2-أ- بين أن $2 . 3^{n-2} \le n!$ $\forall n \in IN^*$

ب- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$

1-أ- رتابة المتتالية

نلاحظ أن حدود هذه المتتالية موجبة قطعا.

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$

$= 2 \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$

ولدينا $(n+1)! = (n+1)\, n!$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}$

وبما أن $n + 1 \ge 2$ فإن $\frac{2}{n+1} \le 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية

ب- تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$

- لدينا المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية
- لدينا المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ مصغورة بالعدد 0

إذن $(u_n)_{n\in IN^*}$ متقاربة

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا $n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n$

$= 2 \times (3 \times 4 \times .... \times n)$

لدينا $3 \le 3$ و $3 \le 4$ و ..... و $3 \le n$ وبضرب هذه المتفاوتات (وعددها n-2) طرفا بطرف نجد أن $3^{n-2} \le 3 \times 4 \times ... \times n$

ومنه $2 . 3^{n-2} \le n!$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا $2 . 3^{n-2} \le n!$ أي $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2 . 3^{n-2}}$

ومنه $\frac{2^n}{n!} \le \frac{2^n}{2 . 3^{n-2}}$ أي $u_n \le \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

إذن $0 < u_n \le \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لان $0 < \frac{2}{3} < 1$ ومنه $\lim \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

إذن $\lim u_n = 0$

* * * *

21

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in IN \qquad u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 \end{cases}$$

1-أ- بين بالترجع أن $u_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$ $\forall n \in IN^*$

2 استنتج نهاية المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي

$$v_n = \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3} \qquad \forall n \in IN^*$$

1- الحد العام للمتتالية

من اجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{6}\, 0 \,.\, (0+1)(2 \,.\, 0 + 1)$ لان $u_0 = 0$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن

$$u_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$$

ونبين أن $u_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

لدينا $u_{n+1} = u_n + (n+1)^2$

ومنه

$$u_{n+1} = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[\, n(2n+1) + 6(n+1)]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2)$$

إذن $\forall n \in IN^* \qquad u_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$

2- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا $u_n - u_{n-1} = n^2$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-1)^2$$

-

-

-

$$u_2 - u_1 = 2^2$$

وبجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد أن $u_n - u_1 = 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

أي $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ علما أن $u_1 = 1$ ومنه $v_n = \frac{u_n}{n^3}$

وحسب السؤال الاول يكون لدينا : $v_n = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1)$

$$= \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

ولدينا $\lim \frac{1}{n} = 0$ ومنه

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ و $\lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

إذن $\lim v_n = \frac{1}{6} \times 1 \times 2$

$$= \frac{1}{3}$$

22

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \qquad \forall n \in IN^*$$

1- بين أنه مهما يكن n من IN^* فإن

$$u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n}\left(u_n - \frac{n}{n^n}\right)$$

2- استنتج أنه مهما يكن n من $IN^* - \{1\}$ فإن :

$$u_n = \frac{n}{(n-1)^2} - \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

3- حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا

$$u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^k} - \frac{1}{n^k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^k}$$

نضع $i = k - 1$ ويكون لدينا $k = i + 1$

ومنه

$$u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^{i+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^i} \,.\, \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^i}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^i} - \frac{n}{n^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(u_n - \frac{n}{n^n}\right)$$

2- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$. حسب السؤال السابق لدينا

$$u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n}\left(u_n - \frac{n}{n^n}\right)$$

ومنه

$$u_n - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n} u_n - \frac{1}{n^n}$$

إذن

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^k - \frac{1}{n^n}$$

ومنه

$$u_n = \frac{n}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^k - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ولدينا

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ولدينا $\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{n} + ... + \frac{1}{n} + 1\right]$

أي $\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 = \frac{1-n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k} + 1\right)$

ومنه $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k} = \frac{n}{1-n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right) - 1$

$$= \frac{n}{1-n}\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{n}{n-1} - 1$$

$$= \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{n}\right)^{n} + \frac{1}{n-1}$$

إذن $u_n = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{n}\right)^{n} + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$

$$= \left(-\frac{n}{(n-1)^2} - \frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{n} + \frac{n}{(n-1)^2}$$

$$= \frac{n}{(n-1)^2} - \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$$

إذن $\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad u_n = \frac{n}{(n-1)^2} - \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$

3- نهاية المتتالية

لدينا $\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad u_n = \frac{n}{(n-1)^2} - \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$

بما أن $\frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{n} > 0$ لكل n من $IN^* - \{1\}$ فإن

$$\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad u_n < \frac{n}{(n-1)^2}$$

وبما أن $u_n > 0$ لكل n من $IN^* - \{1\}$ فإن

$$\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad 0 < u_n < \frac{n}{(n-1)^2}$$

ولدينا $\lim \frac{n}{(n-1)^2} = \lim \frac{n}{n^2 - 2n + 1}$

$$= \lim \frac{1}{n}$$

$$= 0$$

إذن $\lim u_n = 0$

* * * *

23

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN^* \qquad u_n = \frac{2^n\, n!}{(n+1)^n}$$

1-أ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تناقصية

ب- استنتج أن $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in IN^*$

2- استنتج النهاية التالية $\lim \frac{n!}{n^n}$

1-أ- رتابة المتتالية $(u_n)_{n>0}$

نلاحظ أن حدود هذه المتتالية موجبة قطعا.

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{2^n\, n!}$$

$$= \frac{2^n\, 2\,(n+1)\, n!\,(n+1)^n}{2^n\, n!\,(n+2)^{n+1}}$$

$$= 2 \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$$

ومنه $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

ولدينا $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}$

$$= C_{n+1}^{0}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{0} + C_{n+1}^{1}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}$$

ومنه $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2$ إذن $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$

أي $u_n > u_{n+1}$

إذن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تناقصية

ب- الاستنتاج الاول

لدينا $(u_n)_{n>0}$ تناقصية ومنه $u_n \leq u_1 \qquad \forall n \in IN^*$

ولدينا $u_1 = 1$ ومنه $\frac{2^n\, n!}{(n+1)^n} \leq 1 \qquad \forall n \in IN^*$

أي $n! \leq \frac{(n+1)^n}{2^n} \qquad \forall n \in IN^*$

إذن $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in IN^*$

ب- الاستنتاج الثاني

ليكن n عنصرا من IN^* لدينا $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ومنه $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n^n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

أي $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

إذا كان $n \geq 2$ فإن $\frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{2}$ ومنه $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

إذن $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \forall n \in IN^* - \{1\}$

وبالتالي فإن $0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \forall n \in IN^* - \{1\}$

وبما أن $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ لأن $0 < \frac{3}{4} < 1$ فإن $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

* * * *

24

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} \forall n \in IN & u_{n+1} = u_n + [u_n] \\ u_0 = a & \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي لا ينتمي الى $[0 , 1[$.

1- بين أن $\quad [u_n] = 2^n [a] \quad \forall n \in IN$

2- استنتج حسب قيم a ، نهاية المتتالية (u_n)

1- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي

$$v_n = [u_n] \qquad \forall n \in IN$$

ليكن n عنصرا من IN.

لدينا
$$v_{n+1} = [\, u_{n+1} \,] = [\, u_n + [u_n] \,]$$

وبما أن $[u_n] \in \mathbb{Z}$ فإن $v_{n+1} = [u_n] + [u_n]$

أي $v_{n+1} = 2v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية اساسها 2 وحدها الاول $v_0 = [a]$

ومنه $\quad v_n = 2^n [a] \quad \forall n \in IN$

أي $\quad [u_n] = 2^n [a] \quad \forall n \in IN$

2- الاستنتاج

لدينا $\quad [u_n] = 2^n [a] \quad \forall n \in IN$

لدينا $\lim 2^n = +\infty$ وبما أن $a \notin [0 , 1[$ فإن $[a] \neq 0$

إذن إذا كان $[a] > 0$ فإن $\lim [u_n] = +\infty$

إذا كان $[a] < 0$ فإن $\lim [u_n] = -\infty$

وبالتالي فإنه إذا كان $a \geq 1$ فإن $\lim u_n = +\infty$

وإذاكان $a < 0$ فإن $\lim u_n = -\infty$

لأن $\quad [u_n] \leq u_n < [u_n] + 1 \qquad \forall n \in IN$

* * * *

25

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$u_n = \left[\frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\right]^n$$

1-أ- بين أن $\quad (1+n)^2\, u_n < u_{n+1} \qquad \forall n \in IN^*$

ب- استنتج أن $\quad n\,! < \sqrt{u_n} \qquad \forall n \in IN^*$

2-أ- بين أن $\quad 2^{n-1} \leq n\,! \qquad \forall n \in IN^*$

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n)

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN^*.

لدينا
$$u_{n+1} = \left[\frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)\right]^{n+1}$$
$$= \frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)\left[\frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)\right]^n$$

ولدينا
$$(1+n)^2\, u_n = (1+n)^2 \left[\frac{1}{6}\, n\,(n+1)(2n+1)\right]^n$$

ومنه
$$\frac{u_{n+1}}{(1+n)^2\, u_n} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{(1+n)^2}\left[\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{n\,(n+1)(2n+1)}\right]^n$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{(n+2)(2n+3)}{n+1}\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{n\,(2n+1)}\right)^n$$

لدينا $n < n+2$ و $2n+1 < 2n+3$ ومنه $n\,(2n+1) < (n+2)(2n+3)$

أي $\quad \dfrac{(n+2)(2n+3)}{n\,(2n+1)} > 1$

إذن $\quad \left(\dfrac{(n+2)(2n+3)}{n\,(2n+1)}\right)^n > 1$

ومنه $\quad \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{(n+2)(2n+3)}{n+1} < \dfrac{u_{n+1}}{(1+n)^2\, u_n}$

ولدينا
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{(n+2)(2n+3)}{n+1} > 1 \iff (n+2)(2n+3) > 6n+6$$
$$\iff 2n^2 + 7n + 6 > 6n + 6$$
$$\iff 2n^2 + n > 0$$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة فإن $\quad \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{(n+2)(2n+3)}{n+1} > 1$

ومنه $\quad 1 < \dfrac{u_{n+1}}{(1+n)^2\, u_n} \quad$ أي $\quad (1+n)^2\, u_n < u_{n+1}$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN^* . حسب السؤال السابق لدينا

$$n^2\, u_{n-1} < u_n$$
$$(n-1)^2\, u_{n-2} < u_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$2^2\, u_1 < u_2$$

وبما أن جميع حدود هذه المتتالية موجبة فإنه بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد أن :

$$2^2 \,.\, 3^2 \,.\, \ldots\ldots\, n^2 \,.\, u_1 \,.\, u_2 \,.\, \ldots\, u_{n-1} < u_2 \ldots\ldots u_n$$

وبعد الاختزال نجد أن $\quad 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, \ldots\ldots\, n^2\, u_1 < u_n$

أي $\quad (2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\, n)^2 < u_n \quad$ علما أن $\quad u_1 = 1$

إذن $\quad (n\,!)^2 < u_n \quad$ أي $\quad n\,! < \sqrt{u_n}$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN^*

لدينا $\quad n\,! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n$

وبما أن $2 \leq 2$ و $3 \leq 2$ و ...... و $2 \leq n$ فإن

$2^{n-1} \leq 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n \quad$ أي $\quad 2^{n-1} \leq n\,!$

إذن $\quad 2^{n-1} \leq n\,! \qquad \forall n \in IN^*$

ب- نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$

لدينا $\quad n\,! < \sqrt{u_n} \qquad \forall n \in IN^*$

ولدينا $\quad 2^{n-1} \leq n\,! \qquad \forall n \in IN^*$

ومنه $\forall n \in IN^* \quad 2^{n-1} < \sqrt{u_n}$

إذن $\forall n \in IN^* \quad 2^{2n-2} < u_n$

أي $\forall n \in IN^* \quad \frac{1}{4} \cdot 4^n < u_n$

وبما أن $\lim 4^n = +\infty$ لأن $4 > 1$ فإن $\lim \frac{4^n}{4} = +\infty$

ومنه $\lim u_n = +\infty$

* * * *

26

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN \quad u_n = \frac{2\sqrt{n}}{4^n} C_{2n}^n$$

1-أ- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية

ب- استنتج أن $\forall n \in IN^* - \{1\} \quad C_{2n}^n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$

2- بين أن $\forall n \in IN \quad n < 4^n$

3- استنتج نهاية المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN \quad v_n = C_{2n}^n$$

1- رتابة المتتالية

نلاحظ أن جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة قطعا.

ليكن n عنصرا من IN. لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} C_{2(n+1)}^{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{C_{2n}^n}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\, C_{2(n+1)}^{n+1} \cdot \frac{1}{C_{2n}^n}$$

لدينا

$$C_{2(n+1)}^{n+1} = \frac{(2n+2)\,!}{(n+1)\,!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,2n\,!}{(n+1)^2\, n\,!\; n\,!}$$

$$= \frac{2\,(2n+1)}{n+1} C_{2n}^n$$

ومنه

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2\,(2n+1)}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2n+1}{n+1}$$

إذن

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2n+1}{n+1} > 1$$

$$\iff \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} > 2$$

$$\iff 2n+1 > 2\sqrt{n(n+1)}$$

$$\iff (2n+1)^2 > 4n(n+1)$$

$$\iff 4n^2+4n+1 > 4n^2+4n$$

$$\iff 1 > 0$$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة فإن $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ أي $u_{n+1} > u_n$

إذن المتتالية (u_n) تزايدية

ب- الاستنتاج

لدينا (u_n) تزايدية ومنه : $u_n \geq u_2 \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

ولدينا

$$u_2 = \frac{2\sqrt{2}}{16} C_4^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{4!}{2!\,2!}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

إذن $u_n \geq \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

وبما أن $3\sqrt{2} > 4$ فإن $u_n \geq 1 \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

ومنه $C_{2n}^n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \in IN^*$

2- اثبات النتيجة المقترحة

لكي نبين أن $n < 4^n \quad \forall n \in IN$ يكفي أن نبين أن $4^n - n > 0 \quad \forall n \in IN$. لهذا نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بما يلي

$w_n = 4^n - n \quad \forall n \in IN$ وندرس رتابتها

ليكن n عنصرا من IN.

لدينا

$$w_{n+1} - w_n = 4^{n+1} - (n+1) - (4^n - n)$$

$$= 4^{n+1} - 4^n - 1$$

$$= 3 \cdot 4^n - 1$$

وبما أن $4^n \geq 1$ فإن $3 \cdot 4^n - 1 > 0$ أي $w_{n+1} - w_n > 0$

إذن المتتالية (w_n) تزايدية ومنه $w_n > w_0 \quad \forall n \in IN$

أي $w_n \geq 1 \quad \forall n \in IN$ ومنه $4^n - n > 0 \quad \forall n \in IN$

2- اثبات النتيجة المقترحة

حسب السؤال الأول الجزء ب منه لدينا $C_{2n}^n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

أي $v_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

وحسب السؤال الثاني لدينا $4^n > n \quad \forall n \in IN$

ومنه $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{n}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

إذن $v_n > \frac{n}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

أي $v_n > \frac{1}{2}\sqrt{n} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

وبما أن $\lim \sqrt{n} = +\infty$ فإن $\lim \frac{1}{2}\sqrt{n} = +\infty$

إذن $\lim v_n = +\infty$

* * * *

27

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_1 = a \\ \forall n \in IN \qquad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي ينتمي الى المجال $\left]0 , \frac{1}{2}\right]$

لتكن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN^* \qquad v_n = n\, u_n$$

1-أ- بين أن $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ $\quad \forall n \in IN^*$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

2-أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ تزايدية قطعا.

ب- بين أن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ متقاربة

ج- بين أن $a \le \lim v_n \le 1$

3- نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN^* \qquad w_n = n\,(v_{n+1} - v_n)$$

أ- بين أن $w_n = v_n\left(1 - \frac{n+1}{n}\, v_n\right)$ $\quad \forall n \in IN^*$

ب- استنتج أن $(w_n)_{n>0}$ متقاربة وأن

$$\lim w_n = (1 - \lim v_n)\lim v_n$$

ج- بين أن $\lim w_n = 0$ (استعمل الاستدلال بالخلف)

4- استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n>0}$

1-أ- إثبات النتيجة المقترحة

من أجل $n = 1$ لدينا $0 < u_n \le \frac{1}{n+1}$ لان $u_1 = a$ و $0 < a \le \frac{1}{2}$

ليكن n عنصرا من IN^*. نفترض أن $0 < u_n \le \frac{1}{n+1}$

ونبين أن $0 < u_{n+1} \le \frac{1}{n+2}$

- لدينا $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ وبما أن $0 < u_n \le \frac{1}{n+1}$ فإن $0 < u_n < 1$

ومنه $u_n^2 < u_n$ أي $u_{n+1} > 0$

لدينا

$$u_{n+1} - \frac{1}{n+2} = u_n - u_n^2 - \frac{1}{n+2}$$

$$= -\left(u_n^2 - u_n + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= -\left[\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{n+2}\right]$$

$$= -\left[\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n-2}{4(n+2)}\right]$$

لدينا $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ ومنه $-\frac{1}{2} < u_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$

أي $-\frac{1}{2} < u_n - \frac{1}{2} < -\frac{n-1}{2(n+1)}$

إذن $\frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2} < \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$

ومنه $\frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2} - \frac{n-2}{4(n+2)} < \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n-2}{4(n+2)}$

ولدينا

$$\frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2} - \frac{n-2}{4(n+2)} > 0 \iff \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} > \frac{n-2}{n+2}$$

$$\iff (n-1)^2(n+2) > (n-2)(n+1)^2$$

$$\iff (n-1)^2(n+2) > (n+2)(n+1)^2 - 4(n+1)^2$$

$$\iff (n+2)(-4n) > -4(n+1)^2$$

$$\iff 0 < 1$$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة فإن $\frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2} - \frac{n-2}{4(n+2)} > 0$

ومنه $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n-2}{4(n+2)} > 0$ أي $u_{n+1} - \frac{1}{n+2} < 0$

إذن $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ $\quad \forall n \in IN^*$

ب- رتابة المتتالية $(u_n)_{n>0}$

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا :

$u_{n+1} = u_n - u_n^2$ ومنه $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$

وبما أن $u_n > 0$ فإن $u_n \ne 0$ ومنه $-u_n^2 < 0$

إذن $u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$

وبالتالي فإن $(u_n)_{n>0}$ تناقصية قطعا.

ج- الاستنتاج

- لدينا $(u_n)_{n>0}$ مصغورة بالعدد0

- ولدينا $(u_n)_{n>0}$ تناقصية قطعا

إذن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ متقاربة

لدينا $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ $\quad \forall n \in IN^*$

ومنه $0 \le \lim u_n \le \lim \frac{1}{n+1}$

وبما أن $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ فإن $\lim u_n = 0$

2-أ- رتابة المتتالية $(v_n)_{n>0}$

ليكن n عنصرا من IN^*. لدينا

$$v_{n+1} > v_n \iff (n+1)u_{n+1} > n\,u_n$$

$$\iff (n+1)(u_n - u_n^2) > n\,u_n$$

$$\iff u_n - (n+1)u_n^2 > 0$$

$$\iff 1 - (n+1)\,u_n > 0$$

$$\iff u_n < \frac{1}{n+1}$$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة (أنظر السؤال الاول الجزء أ منه)

فإن $v_n < v_{n+1}$

إذن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ تزايدية قطعا.

ب- تقارب المتتالية $(v_n)_{n>0}$

- لدينا $(v_n)_{n>0}$ تزايدية قطعا.

- لدينا $u_n < \frac{1}{n+1}$ $(\forall n \in IN^*)$ ومنه $v_n < \frac{n}{n+1}$ $(\forall n \in IN^*)$

وبما أن $\frac{n}{n+1} < 1$ $\forall n \in IN^*$ فإن $v_n < 1$ $\forall n \in IN^*$

إذن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ مكبورة بالعدد 1.

- و بالتالي فإنها متقاربة

تأطير نهاية المتتالية $(v_n)_{n>0}$

- لدينا $(v_n)_{n>0}$ تزايدية قطعا ومنه $v_1 \le v_n$ $\forall n \in IN^*$

أي $a \le v_n$ $\forall n \in IN^*$

ومنه $a \le \lim v_n$

- لدينا $v_n < \frac{n}{n+1}$ $(\forall n \in IN^*)$ (أنظر الجزء الاول من هذا السؤال)

ومنه $\lim v_n \le \lim \frac{n}{n+1}$ أي $\lim v_n \le 1$

- إذن $a \le \lim v_n \le 1$

3-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN*. لدينا :

$$w_n = n(v_{n+1} - v_n)$$
$$= n((n+1)u_{n+1} - nu_n)$$

وبما أن $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ فإن

$$(n+1)u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+1)u_n^2$$
$$= nu_n + u_n - (n+1)u_n^2$$

ومنه

$$w_n = n(u_n - (n+1)u_n^2)$$
$$= nu_n(1 - (n+1)u_n)$$

وبما أن $v_n = nu_n$ فإن $u_n = \frac{v_n}{n}$ ومنه

$$w_n = v_n\left(1 - \frac{n+1}{n}v_n\right)$$

إذن $w_n = v_n\left(1 - \frac{n+1}{n}v_n\right)$ $\forall n \in IN^*$

ب- الاستنتاج الاول

لدينا $w_n = v_n - \frac{n+1}{n}v_n^2$ $\forall n \in IN^*$

بما أن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ متقاربة وأن المتتالية $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n>0}$ متقاربة

فإن المتتالية $\left(\frac{n+1}{n}v_n^2\right)_{n>0}$ متقاربة

وبما أن $(w_n)_{n>0}$ هي فرق متتاليتين متقاربتين فإنها متقاربة

- الاستنتاج الثاني

لدينا $w_n = v_n - \frac{n+1}{n}v_n^2$ $\forall n \in IN^*$

ومنه

$$\lim w_n = \lim v_n - \lim \frac{n+1}{n}v_n^2$$
$$= \lim v_n - \lim \frac{n+1}{n}(\lim v_n)^2$$
$$= \lim v_n - (\lim v_n)^2$$

إذن $\lim w_n = (1 - \lim v_n)\lim v_n$

ج- نهاية المتتالية (w_n)

نفترض أن $\lim w_n \neq 0$ ونضع $\alpha = \lim w_n$

وبما أن $0 \le w_n$ $\forall n \in IN$ (لان المتتالية $(v_n)_{n>0}$ تزايدية)

فإن $0 \le \lim w_n$ أي $0 \le \alpha$

وحسب الافتراض يكون لدينا $0 < \alpha$

لدينا $\lim w_n = \alpha$ وحسب التعريف يكون لدينا

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in IN \quad \forall n \in IN^* \quad n \ge N \Rightarrow |w_n - \alpha| < \varepsilon$$

إذا اخذنا $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ فإنه يوجد عنصر N من IN* بحيث

$$\forall n \in IN \qquad n \ge N \Rightarrow |w_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$$

ليكن n عنصرا من IN بحيث $n \ge N$. لدينا

$$|w_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2} \le w_n - \alpha < \frac{\alpha}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \le w_n < \frac{3\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2n} < v_{n+1} - v_n$$

إذن $\frac{\alpha}{2n} < v_{n+1} - v_n$ $\forall n \in IN \ (n \ge N)$

لدينا إذن

$$\frac{\alpha}{2n} < v_{n+1} - v_n$$
$$\frac{\alpha}{2(n+1)} < v_{n+2} - v_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\alpha}{2(2n-1)} < v_{2n} - v_{2n-1}$$

وبجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف (وعددها n) نجد أن

$$\frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} \le v_{2n} - v_n$$

ولدينا $\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{k}$ مهما يكن k من $\{n, \dots, 2n-1\}$

ومنه $\frac{n}{2n-1} \le \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k}$

إذن $\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} < v_{2n} - v_n$

وبالتالي فإن $\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} < v_{2n} - v_n$ $\forall n \in IN \ (n \ge N)$

ومنه $\lim \frac{\alpha}{2}\frac{n}{2n-1} \le \lim(v_{2n} - v_n)$

أي $\frac{\alpha}{4} \le \lim(v_{2n} - v_n)$

وبما أن (v_n) متقاربة فإن $\lim(v_{2n} - v_n) = 0$

ومنه $0 \le \frac{\alpha}{4}$ أي $\alpha \le 0$ وهذا يخالف الافتراض

إذن $\lim w_n = 0$

4- الاستنتاج

لدينا $\lim w_n = (1 - \lim v_n) \lim v_n$

وبما أن $\lim w_n = 0$ فإن $\lim v_n = 0$ أو $\lim v_n = 1$

ولدينا $\lim v_n \ge a$ و $a > 0$ ومنه $\lim v_n > 0$

إذن $\lim v_n = 1$

* * * *

28

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = a - \frac{1}{2} \\ \forall n \in IN \quad u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)\, u_n + a^2 \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي.

ونعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = x^2 + (1 - 2a)x + a^2$$

1-أ- بين أن $f([a-1 , a]) \subset [a-1 , a]$

ب- استنتج أن $\forall n \in IN \quad a-1 \le u_n \le a$

2-أ- بين أن $\forall n \in IN \quad f(x) \ge x$

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية.

3-أ- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة

ب- بين أن $\lim u_n = a$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$\begin{aligned} f(x) \in [a-1 , a] &\Leftrightarrow a - 1 \le f(x) \le a \\ &\Leftrightarrow a - 1 \le x^2 + (1 - 2a)\, x + a^2 \le a \\ &\Leftrightarrow a - 1 \le (x - a)^2 + x \le a \\ &\Leftrightarrow -1 \le (x - a)^2 + x - a \le 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \le (x - a)(x - a + 1) \le 0 \end{aligned}$$

إذا كان $a - 1 \le x \le a$ فإن $-1 \le x - a \le 0$ و $0 \le x - a + 1 \le 1$

ومنه $0 \le -(x - a)(x - a + 1) \le 1$

أي $-1 \le (x - a)(x - a + 1) \le 0$

إذن إذا كان $a - 1 \le x \le a$ فإن $a - 1 \le f(x) \le a$

ومنه $f([a - 1 , a]) \subset [a - 1 , a]$

ب- الاستنتاج

من أجل $n = 0$ لدينا $a - 1 \le u_n \le a$ لأن $u_0 = a - \frac{1}{2}$ و $a-1 < a - \frac{1}{2} < a$

ليكن n عنصرا من IN.

نفترض أن $a - 1 \le u_n \le a$ ونبين أن $a - 1 \le u_{n+1} \le a$

لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ وحسب السؤال السابق يكون لدينا

$a - 1 \le u_{n+1} \le a$ علما أن $a - 1 \le u_n \le a$

إذن $\forall n \in IN \quad a - 1 \le u_n \le a$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$\begin{aligned} f(x) \ge x &\Leftrightarrow x^2 + (1 - 2a)\, x + a^2 \ge x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

إذن $\forall x \in IR \quad f(x) \ge x$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$u_{n+1} = f(u_n)$ و $\forall x \in IR \quad f(x) \ge x$

ومنه $u_{n+1} \ge u_n$

إذن المتتالية (u_n) تزايدية.

3-أ- تقارب المتتالية (u_n)

لدينا : - المتتالية (u_n) تزايدية

- المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد a

إذن المتتالية (u_n) متقاربة

ب- نهاية المتتالية (u_n)

لدينا: - المتتالية (u_n) متقاربة

- $\forall n \in IN \quad u_{n+1} = f(u_n)$

- f متصلة على $[a - 1 , a]$

- $f([a - 1 , a]) \subset [a - 1 , a]$

إذن $\lim u_n$ هي جذر للمعادلة $f(x) = x$

ولدينا

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x^2 + x - 2ax + a^2 = x \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = a \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $\lim u_n = a$

* * * *

29

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ \forall n \in IN \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} - 1 \end{cases}$$

ونعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad f(x) = \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x^2}} - 1$$

1-أ- بين أن $f(]-1 , 0[) \subset]-1 , 0[$

ب- استنتج أن $\forall n \in IN \quad -1 < u_n < 0$

2-أ- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3-أ- حل في IR المعادلة $f(x) = x$

ب- بين أن $\lim u_n \leq -\frac{1}{2}$

ج- استنتج نهاية المتتالية (u_n)

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$f(x) \in]-1, 0[\Leftrightarrow -1 < f(x) < 0$$
$$\Leftrightarrow -1 < \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < 1+x < \sqrt{1+x^2}$$
$$\Leftrightarrow (1+x)^2 < 1+x^2 \text{ و } 1+x>0$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 0$$

إذن $\forall x \in]-1, 0[\quad f(x) \in]-1, 0[$

ومنه $f(]-1, 0[) \subset]-1, 0[$

ب- الاستنتاج

من أجل $n = 0$ لدينا $-1 < u_n < 0$ لان $u_0 = -\frac{1}{2}$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن $-1 < u_n < 0$ ونبين أن $0 < u_{n+1} < -1$

لدينا $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1$ أي $u_{n+1} = f(u_n)$

وبما أن $f(]-1, 0[) \subset]-1, 0[$ و $-1 < u_n < 0$

فإن $-1 < f(u_n) < 0$ ومنه $-1 < u_{n+1} < 0$

إذن $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in IN$

2-أ- رتابة المتتالية (u_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1 - u_n$$
$$= (1+u_n)\left(\frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1\right)$$

وبما أن $1 < 1 + u_n^2$ فإن $\frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} < 1$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1 < 0$

وبما أن $-1 < u_n$ فإن $0 < 1 + u_n$

إذن $u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$

وهذا يعني أن (u_n) تناقصية قطعا.

ب- الاستنتاج

لدينا : - المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.

- المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1-.

إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

3-أ- حل المعادلة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = x$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ أو } 1+x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ أو } x = 0$$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $S = \{-1, 0\}$

ب- اثبات المتفاوتة المقترحة

لدينا (u_n) تناقصية ومنه

$$\forall n \in IN \quad u_n \leq u_0$$

ومنه $\lim u_n \leq u_0$ أي $\lim u_n \leq -\frac{1}{2}$

ج- الاستنتاج

لدينا: - $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in IN$

- f متصلة على $[-1, 0]$

- $f([-1, 0[) \subset]-1, 0[$

- $\forall n \in IN \quad u_n \in]-1, 0[$

إذن $\lim u_n$ هي احد حلول المعادلة $f(x) = x$

ومنه $\lim u_n = 0$ أو $\lim u_n = -1$

وبما أن $\lim u_n \leq -\frac{1}{2}$ فإن $\lim u_n = -1$

* * * *

30

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in IN \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي موجب قطعا ويخالف 1.

1-أ- بين أن $u_n > \sqrt{a} \quad \forall n \in IN^*$

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تناقصية قطعا.

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة.

2- بين أن $\lim u_n = \sqrt{a}$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

من أجل $n = 1$ لدينا $u_1 > \sqrt{a}$ لان

$u_1 = \frac{1}{2}(1+a)$ و $1 + a > 2\sqrt{a}$

ليكن n عنصرا من *IN. نفترض أن $u_n > \sqrt{a}$ ونبين أن $u_{n+1} > \sqrt{a}$

لدينا $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + a - 2\sqrt{a}\,u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$$

بما أن $u_n > \sqrt{a}$ فإن $u_n > 0$ و $u_n - \sqrt{a} > 0$ ومنه

$u_{n+1} - \sqrt{a} > 0$ أي $u_{n+1} > \sqrt{a}$

إذن $u_n > \sqrt{a}$ $\forall n \in IN^*$

ب- رتابة المتتالية $(u_n)_{n>0}$

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + a - 2u_n^2\right)$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(a - u_n^2\right)$$

بما أن $u_n > \sqrt{a}$ فإن $u_n^2 - a > 0$ و $u_n > 0$ ومنه

$u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$

إذن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تناقصية قطعا

ج- الاستنتاج

لدينا : - المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تناقصية قطعا.

- المتتالية $(u_n)_{n>0}$ مصغورة بالعدد $\sqrt{a}$

إذن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ متقاربة.

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة

* * * *

2- نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $u_n > \sqrt{a}$ $\forall n \in IN^*$ ومنه $\lim u_n \geq \sqrt{a}$

وبما أن $\sqrt{a} > 0$ فإن $\lim u_n > 0$

نضع $\alpha = \lim u_n$

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ $\forall n \in IN$

ومنه $\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim u_n + \frac{a}{\lim u_n}\right)$$

إذن $\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right)$ أي $2\alpha^2 = \alpha^2 + a$

بمعنى أن $\alpha^2 = a$ وبما أن $\alpha > 0$ فإن $\alpha = \sqrt{a}$

وبالتالي فإن $\lim u_n = \sqrt{a}$

* * * *

31

لتكن (x_n) متتالية عددية بحيث $\frac{1}{2} < x_n < 1$ $(\forall n \in IN)$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}} & \forall n \in IN \end{cases}$$

1-أ- بين أن $0 < u_n < 1$ $\forall n \in IN$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة حيث $0 \leq \lim u_n \leq 1$

2-أ- ليكن n عنصرا من IN

بين أن $x_n(-1 + u_n u_{n-1}) = u_{n-1} - u_n$

ب- استنتج أنه إذا كان (x_n) متقاربة فإن $\lim u_n = 1$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

من أجل $n = 0$ لدينا $0 < u_1 < 1$ لأن $u_0 = x_0$ و $\frac{1}{2} < x_0 < 1$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن $0 < u_n < 1$ ونبين أن $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا $u_{n+1} = \frac{u_n + x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}}$

لدينا $0 < u_n$ و $0 < x_{n+1}$ ومنه $1 + u_n x_{n+1} > 1$

إذن $0 < u_{n+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < u_n + x_{n+1} < 1 + u_n x_{n+1}$

$$\Leftrightarrow u_n + x_{n+1} - u_n x_{n+1} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (u_n - 1)(1 - x_{n+1}) < 0$$

بما أن $u_n < 1$ و $x_{n+1} < 1$ فإن $u_n - 1 < 0$ و $1 - x_{n+1} < 0$

ومنه العبارة $(u_n - 1)(1 - x_{n+1}) < 0$ صحيحة. إذن $0 < u_{n+1} < 1$

وبالتالي فإن $0 < u_n < 1$ $\forall n \in IN$

ب- رتابة المتتالية (u_n)

ليكن n عنصرا من IN . لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}} - u_n$$

$$= \frac{u_n + x_{n+1} - u_n - u_n^2 x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}}$$

$$= \frac{x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}}\left(1 - u_n^2\right)$$

بما أن $0 < u_n < 1$ فإن $1 - u_n^2 > 0$

ولدينا $x_{n+1} > 0$ و $u_n > 0$ ومنه $\frac{x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}} > 0$

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$

وهذا يعني أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

ج- الاستنتاج

لدينا (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 1

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا $\forall n \in IN \quad 0 < u_n < 1$

ومنه $0 \le \lim u_n \le 1$

2-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $u_n = \frac{u_{n-1} + x_n}{1 + x_n u_{n-1}}$ ومنه $u_n + x_n u_n u_{n-1} = u_{n-1} + x_n$

أي $x_n (u_n u_{n-1} - 1) = u_{n-1} - u_n$

إذن $x_n (-1 + u_n u_{n-1}) = u_{n-1} - u_n$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall n \in IN \quad x_n (-1 + u_n u_{n-1}) = u_{n-1} - u_n$

بماأن (u_n) متقاربة فإن $\lim u_{n-1} = \lim u_n$

ومنه $\lim x_n (-1 + u_n u_{n-1}) = 0$

وبما أن (x_n) متقاربة و المتتالية $(-1 + u_n u_{n-1})$ متقاربة

فإن $\lim x_n \ . \ \lim x_n (-1 + u_n u_{n-1}) = 0$

نضع $\alpha = \lim u_n$ ويكون لدينا $\lim x_n \ . \ (-1 + \alpha^2) = 0$

وبما أن $\forall n \in IN \quad \frac{1}{2} < x_n < 1$ فإن $\frac{1}{2} \le \lim x_n \le 1$

ومنه $\lim x_n \ne 0$

إذن $-1 + \alpha^2 = 0$ أي $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$

وبما أن $0 \le \lim u_n \le 1$ أي $0 \le \alpha \le 1$ فإن $\alpha = 1$

إذن $\lim u_n = 1$

* * * *

32

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) بحيث

$$0 < u_0 < v_0$$

$$\forall n \in IN \quad u_n v_n = u_0 v_0$$

$$\forall n \in IN \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

1-أ- بين أن $\forall n \in IN \quad 0 < u_n < v_n$

ب- استنتج أن (v_n) تناقصية وأن (u_n) تزايدية

2-أ- بين أن $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب- استنتج أنهما متحاديتان.

3- حدد نهايتي المتتاليتين (u_n) و (v_n)

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

من أجل $n = 0$ لدينا $0 < u_0 < v_0$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن $0 < u_n < v_n$ ونبين أن $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$

- لدينا $u_{n+1} . v_{n+1} = u_0 v_0$ وبما أن $u_0 v_0 > 0$ فإن $u_{n+1} . v_{n+1} > 0$

ولدينا $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ وبما أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$ فإن $v_{n+1} > 0$

إذن $u_{n+1} > 0$.

- لدينا $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \frac{u_0 v_0}{v_{n+1}}$

لأن $u_{n+1} . v_{n+1} = u_0 v_0$

وبما أن $u_0 v_0 = u_n v_n$ فإن

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \frac{u_n v_n}{v_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{v_{n+1}}\left[\frac{1}{4}(u_n + v_n)^2 - u_n v_n\right]$$

$$= \frac{1}{4 v_{n+1}}((u_n + v_n)^2 - 4 u_n v_n)$$

$$= \frac{1}{4 v_{n+1}}(u_n - v_n)^2$$

بما أن $u_n < v_n$ فإن $(u_n - v_n)^2 > 0$ وبما أن $v_{n+1} > 0$ فإن

$v_{n+1} - u_{n+1} > 0$ أي $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذن $\forall n \in IN \quad 0 < u_n < v_n$

ب- رتابة المتتالية (v_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - v_n$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

بما أن $u_n < v_n$ فإن $v_{n+1} - v_n < 0$ أي $v_{n+1} < v_n$

إذن المتتالية (v_n) تناقصية.

رتابة المتتالية (u_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$u_n v_n = u_0 v_0$ و $u_{n+1} . v_{n+1} = u_0 v_0$

ومنه $u_n v_n = u_{n+1} v_{n+1}$ أي $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

بما أن المتتالية (v_n) تناقصية وأن حدودها موجبة قطعا فإن

$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ ومنه $\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$ أي $u_n < u_{n+1}$ (لأن $u_{n+1} > 0$)،

إذن المتتالية (u_n) تزايدية.

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4 v_{n+1}}(u_n - v_n)^2$$

انظر حل السؤال الاول الجزء أ منه

ومنه $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{4 v_{n+1}}(v_n - u_n)$

ولدينا $\frac{v_n - u_n}{4 v_{n+1}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_n - u_n < 2 v_{n+1}$

$\Leftrightarrow v_n - u_n < u_n + v_n$

$\Leftrightarrow 0 < u_n$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة فإن $\frac{v_n - u_n}{4 v_{n+1}} < \frac{1}{2}$

ومنه $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ علما أن $v_n - u_n > 0$

إذن $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n) \quad \forall n \in IN$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN . حسب السؤالين الثاني والأول يكون لدينا

$$0 < v_n - u_n < \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

$$0 < v_{n-1} - u_{n-1} < \frac{1}{2}(v_{n-2} - u_{n-2})$$

.

.

.

$$0 < v_1 - u_1 < \frac{1}{2}(v_0 - u_0)$$

وبضرب هذه المتفاوتات (وعددها n) طرفا بطرف نجد أن

$$0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

إذن $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \quad \forall n \in IN$

وبما أن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = 0$

ومنه $\lim (v_n - u_n) = 0$

لدينا إذن : $0 < u_n < v_n \quad \forall n \in IN$ -

- المتتالية (u_n) تزايدية

- المتتالية (u_n) تناقصية

- $\lim (v_n - u_n) = 0$

ومنه المتتاليتين (u_n) و (v_n) متحاديتان .

3- النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)

لدينا (u_n) و (v_n) متحاديتان ومنه (u_n) و (v_n) متقاربتين ولهما نفس النهاية α .

لدينا $u_n v_n = v_0 u_0 \quad \forall n \in IN$

ومنه $\lim u_n v_n = u_0 v_0$

أي $\lim u_n \lim v_n = u_0 v_0$

بمعنى أن $\alpha^2 = u_0 v_0$

وبما أن $0 < u_n \quad \forall n \in IN$ فإن $0 \leq \lim u_n$ أي $0 \leq \alpha$.

إذن $\alpha = \sqrt{u_0 v_0}$

وبالتالي فإن $\lim u_n = \lim v_n = \sqrt{u_0 v_0}$

* * * *

33 نعتبر المتتاليتين العدديتين (a_n) و (b_n) المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} a_0 = a \quad \text{و} \quad b_0 = b \\ \forall n \in IN^* \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \quad \text{و} \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان و $0 < a < b < 3a$

1-أ- بين بالترجع أن $0 < a_n < b_n$

ب- بين أن المتتالية (a_n) تزايدية و المتتالية (b_n) تناقصية

ج- بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متحاديتان.

2- لتكن α النهاية المشتركة للمتتاليتين (a_n) و (b_n)

بين أن $a \leq \alpha \leq b$

ب-أ- اثبات النتيجة المقترحة

من أجل $n = 0$ لدينا $0 < a_0 < b_0$ لان $0 < a < b$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن $0 < a_n < b_n$ ونبين أن $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$

لدينا $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ وبما أن $a_n > 0$ و $b_n > 0$ فإن $a_{n+1} > 0$

لدينا $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n}$

$$= \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$$

بما أن $0 < a_n < b_n$ فإن $\sqrt{a_n} < \sqrt{b_n}$ ومنه $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 > 0$

أي $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$ أي $b_{n+1} > a_{n+1}$

وبالتالي فإن $0 < a_n < b_n \quad \forall n \in IN$

ب- رتابة المتتالية (a_n)

ليكن n عنصرا من IN . لدينا

لدينا $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n$

$$= \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})$$

بما أن $0 < a_n < b_n$ فإن $0 < \sqrt{a_n} < \sqrt{b_n}$ ومنه

$\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} > 0$ إذن $a_{n+1} - a_n > 0$ أي $a_{n+1} > a_n$

وبالتالي فإن المتتالية (a_n) تزايدية

رتابة المتتالية (b_n)

ليكن n عنصرا من IN . لدينا

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

بما أن $a_n < b_n$ فإن $b_{n+1} - b_n < 0$ أي $b_{n+1} < b_n$

إذن المتتالية (b_n) تناقصية.

ج- المتتالية (a_n) و (b_n) متحاديتان

لدينا : - $a_n < b_n \quad \forall n \in IN$

- المتتالية (a_n) تزايدية

- المتتالية (b_n) تناقصية

ولكي نبين أن المتتالين (a_n) و (b_n) متحاديتان يكفي أن نبين أن $\lim (b_n - a_n) = 0$

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}\right)^2$$
$$= \frac{b_n - a_n}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}\,(b_n - a_n)$$

لدينا (b_n) تناقصية ومنه $b_n < b_0$

ولدينا (a_n) تزايدية ومنه $a_0 < a_n$ أي $-a_n < -a_0$

إذن $0 < b_n - a_n < b_0 - a_0$

ولدينا $\sqrt{a_0} < \sqrt{a_n}$ و $\sqrt{a_n} < \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$ ومنه

$$\sqrt{a_0} < \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$$

أي $\dfrac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} < \dfrac{1}{\sqrt{a_0}}$ بمعنى أن $\dfrac{1}{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} < \dfrac{1}{a_0}$

إذن $0 < \dfrac{b_n - a_n}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} < \dfrac{b_0 - a_0}{2\,a_0}$

أي $0 < \dfrac{b_n - a_n}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} < \dfrac{b - a}{2a}$

ومنه $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{b - a}{2a}\,(b_n - a_n)$

وبالتالي فإن $0 < b_n - a_n < \dfrac{b - a}{2\,a}\,(b_{n-1} - a_{n-1})$ $\forall n \in IN$

ومنه $0 < b_n - a_n < \dfrac{b - a}{2\,a}\,(b_{n-1} - a_{n-1})$

$0 < b_{n-1} - a_{n-1} < \dfrac{b - a}{2\,a}\,(b_{n-2} - a_{n-2})$

"

"

$0 < b_1 - a_1 < \dfrac{b - a}{2\,a}\,(b_0 - a_0)$

ويضرب هذه التفاوتات (وعددها n) طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد أن

$$0 < b_n - a_n < \left(\frac{b - a}{2\,a}\right)^n (b_0 - a_0)$$

إذن $0 < b_n - a_n < \left(\dfrac{b - a}{2\,a}\right)^n (b - a)$ $\forall n \in IN$

وبما أن $b < 3a$ فإن $b - a < 2a$ أي $\dfrac{b - a}{2\,a} < 1$

إذن $\lim \left(\dfrac{b - a}{2\,a}\right)^n = 0$ علما أن $0 < \dfrac{b - a}{2\,a}$

ومنه $\lim\,(b - a)\left(\dfrac{b - a}{2\,a}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\,(b_n - a_n) = 0$

وبالتالي فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متحاديتان.

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا (b_n) تناقصية ومنه $b_n \le b_0$ $\forall n \in IN$

ومنه $\lim b_n \le b_0$ أي $\alpha \le b$

ولدينا (a_n) تزايدية ومنه $a_0 \le a_n$ $\forall n \in IN$

ومنه $\lim a_n \ge a_0$ أي $\alpha \ge a$

إذن $a \le \alpha \le b$

* * * *

34

ليكن k عددا حقيقيا اكبر من أو يساوي 1. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ u_{n+1} = k + \dfrac{1}{u_n} \quad ; \forall n \in IN \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بما يلي

$\forall n \in IN \qquad x_n = u_{2n}$

$\forall n \in IN \qquad y_n = u_{2n+1}$

1- بين أن $k \le u_n < k + 1$ $\forall n \in IN$

2-أ- بين أن $x_{n+1} = k + \dfrac{x_n}{k\,x_n + 1}$ $\forall n \in IN$

ب- بين أن $y_{n+1} = k + \dfrac{y_n}{k\,y_n + 1}$ $\forall n \in IN$

ج- استنتج أن $x_n < y_n$ $\forall n \in IN$

3-أ- بين أن المتتالية (x_n) تزايدية

ب- استنتج أن المتتالية (y_n) تناقصية

ج- بين أن المتتاليتين (x_n) و (y_n) متحاديتان

4-أ- حدد α نهاية المتتالية (x_n)

ب- بين أن $|u_n - \alpha| < \left(\dfrac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha|$ $\forall n \in IN$

ج- استنتج أن $\lim u_n = \lim x_n$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = k$ لان $k \le u_n < k + 1$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن $k < u_n < k + 1$

ونبين أن $k \le u_{n+1} < k + 1$.

لدينا $u_{n+1} = k + \dfrac{1}{u_n}$ وبما أن $k \le u_n < k + 1$ و $0 < k$

فإن $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{u_n} \le \dfrac{1}{k}$ ومنه $k + \dfrac{1}{k+1} < k + \dfrac{1}{u_n} \le k + \dfrac{1}{k}$

وبما أن $k > 1$ فإن $\dfrac{1}{k} < 1$ و $0 < \dfrac{1}{k+1}$ ومنه

أي $k < k + \frac{1}{u_n} < k+1$ $k < u_{n+1} < k+1$

إذن $(\forall n \in IN)\ \ k \le u_n < k+1$

2-أ- العلاقة الترجعية بين حدود المتتالية (x_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$x_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{(2n+1)+1} = k + \frac{1}{u_{2n+1}}$$

ولدينا

$$u_{2n+1} = k + \frac{1}{u_{2n}} = k + \frac{1}{x_n} = \frac{k\,x_n + 1}{x_n}$$

إذن $x_{n+1} = k + \frac{x_n}{k\,x_n+1}$

وبالتالي فإن $x_{n+1} = k + \frac{x_n}{k\,x_n+1}$ $\quad \forall n \in IN$

ب- العلاقة الترجعية بين حدود المتتالية (y_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$y_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = k + \frac{1}{u_{2(n+1)}}$$

ولدينا

$$u_{2(n+1)} = k + \frac{1}{u_{2n+1}} = k + \frac{1}{y_n} = \frac{k\,y_n+1}{y_n}$$

إذن $y_{n+1} = k + \frac{y_n}{k\,y_n+1}$

وبالتالي فإن $y_{n+1} = k + \frac{y_n}{k\,y_n+1}$ $\quad \forall n \in IN$

ج- الاستنتاج

* من أجل $n = 0$ لدينا $x_0 < y_0$ لأن $x_0 = u_0 = k$ و $y_0 = u_1 = k + \frac{1}{k}$ و $k > 0$

ليكن n عنصرا من IN. نفترض أن $x_n < y_n$ ونبين أن $x_{n+1} < y_{n+1}$. حسب السؤالين السابق يكون لدينا

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \left(k + \frac{y_n}{k\,y_n+1}\right) - \left(k + \frac{x_n}{k\,x_n+1}\right) = \frac{y_n}{k\,y_n+1} - \frac{x_n}{k\,x_n+1} = \frac{y_n - x_n}{(k\,y_n+1)(k\,x_n+1)}$$

بما أن $k \le u_n$ $\forall n \in IN$ و $k > 0$ فإن $0 < u_n$ $\forall n \in IN$

ومنه $x_n > 0$ و $y_n > 0$

إذن $(ky_n+1)(kx_n+1) > 0$

وحسب افتراض الترجع لدينا $y_n - x_n > 0$ ومنه $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$

إذن $x_n < y_n$ $\quad \forall n \in IN$

3-أ- رتابة المتتالية (x_n)

ليكن n عنصرا من IN حسب السؤال الثاني الجزء أ منه لدينا

$$x_{n+1} = k + \frac{x_n}{k\,x_n+1}$$

ومنه

$$x_{n+1} - x_n = k + \frac{x_n}{k\,x_n+1} - x_n = k\left(1 - \frac{x_n^2}{k\,x_n+1}\right)$$

ولدينا $x_n < y_n$ و

$$y_n = u_{2n+1} = k + \frac{1}{u_{2n}} = k + \frac{1}{x_n}$$

ومنه $x_n < k + \frac{1}{x_n}$ أي $x_n < \frac{k\,x_n+1}{x_n}$

بمعنى أن $\frac{x_n^2}{k\,x_n+1} < 1$ أي $1 - \frac{x_n^2}{k\,x_n+1} > 0$

إذن $x_{n+1} - x_n > 0$

وهذا يعني أن المتتالية (x_n) تزايدية

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$y_n = k + \frac{1}{x_n}$ (أنظر حل السؤال السابق)

ومنه

$$y_{n+1} - y_n = \left(k + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - \left(k + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n\,x_{n+1}}$$

بما أن المتتالية (x_n) تزايدية فإن $x_{n+1} - x_n > 0$

وبما أن $k \le u_n$ $\forall n \in IN$ و $k > 0$ فإن $x_n > 0$ و $x_{n+1} > 0$

ومنه $y_{n+1} - y_n < 0$

وهذا يعني أن المتتالية (y_n) تناقصية.

ج- المتتاليتان (x_n) و (y_n) متحاديتان

لدينا :- $\forall n \in IN \quad x_n < y_n$

إذن $\forall x \in IR - \left\{-\frac{1}{a}\right\} \quad f_{-a}(x) = -f_a(-x)$

2- أ- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا $\forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad f'_a(x) = \frac{1}{1+x^2}$

أي $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\right) \; f'_a(x) = \text{Arctan}'(x)$

ومنه $(\exists \alpha \in IR) \quad \forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad f_a(x) = \text{Arctan}\, x + \alpha$

بما أن $a < 0$ فإن $0 \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ ومنه

$$f_a(0) = \text{Arctan}\, 0 + \alpha$$

أي

$$\alpha = f_a(0) = \text{Arctan}\, a$$

إذن $\forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad f_a(x) = \text{Actan}\, x + \text{Arctan}\, a$

ب- اثبات المتساوية المقترحة

نضع $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, a$

لدينا $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\, a < 0$ لأن $a < 0$ ومنه

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, a < 0$$

لدينا

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, a\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\, a\right) = \frac{1}{\tan(\text{Arctan}\, a)} = \frac{1}{a}$$

ومنه $-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, a = \text{Arctan}\,\frac{1}{a}$

إذن $\text{Arctan}\,\frac{1}{a} + \text{Arctan}\, a = -\frac{\pi}{2}$

ج- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\quad f'_a(x) = \text{Arctan}'(x)$

ومنه $(\exists \alpha \in IR) \quad \left(\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\right) \; f_a(x) = \text{Arctan}\, x + \alpha$

إذن

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} (\text{Arctan}\, x + \alpha) = -\frac{\pi}{2} + \alpha$$

وبما أن

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \text{Arctan}\left(-\frac{1}{a}\right) = -\text{Arctan}\,\frac{1}{a}$$

فإن $-\frac{\pi}{2} + \alpha = -\text{Arctan}\,\frac{1}{a}$

وحسب السؤال السابق لدينا

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, a\right) = \pi + \text{Arctan}\, a$$

إذن $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\quad f_a(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, a + \pi$

3- الاستنتاج

ليكن x و y عنصرين من IR بحيث $xy \neq 1$

إذا كان $x = 0$ فإن

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan}\, y$$

نفترض أن $x < 0$ لدينا

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f_x(y)$$

وحسب السؤال الثاني لدينا

$$f_x(y) = \text{Arctan}\, y + \text{Arctan}\, x + \varepsilon\pi$$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

إذن $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y + \varepsilon\,\pi$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

نفترض أن $x > 0$ لدينا

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f_x(y) = -f_{-x}(-y)$$

وذلك حسب السؤال الأول الجزء ب منه.

وحسب السؤال الثاني لدينا

$$f_{-x}(-y) = \text{Arctan}\,(-x) + \text{Arctan}\,(-y) + \varepsilon\pi$$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

ومنه $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y - \varepsilon\,\pi$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

أي $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y + \varepsilon\,\pi$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = -1$.

وبالتالي فإن مهما يكن x و y من IR بحيث $xy \neq 1$ فإن

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y + \varepsilon\,\pi$$

حيث $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$

* * * *

ولدينا حسب افتراض الترجع : $|u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha|$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^{n+1} |k - \alpha|$

وبالتالي فإن $|u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha| \quad \forall n \in IN$

ج- الاستنتاج

لدينا $|u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha| \quad \forall n \in IN$

ولدينا $1 < k$ و $k \le \alpha$ فإن $1 < \alpha k$

أي $0 < \frac{1}{\alpha k} < 1$ ومنه $\lim \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n = 0$

إذن $\lim |k - \alpha| \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n = 0$

ومنه $\lim u_n = \alpha = \lim x_n$

* * * *

35

ليكن a و b عددين موجبين قطعا. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$u_{n+2} = \frac{1}{a+b}(au_n + bu_{n+1}) \quad \forall n \in IN$$

1- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in IN$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية محددا اساسها.

ب- استنتج الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة a و b و n و u_0 و u_1

ج- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها

2- نعتبر المتتاليتين العدديتين (a_n) و (b_n) المعرفتين بما يلي

$$\forall n \in IN \quad a_n = \inf(u_n , u_{n+1})$$

$$\forall n \in IN \quad b_n = \sup(u_n , u_{n+1})$$

أ- بين أن $a_n \le u_{n+2} \le b_n \quad \forall n \in IN$

ب- استنتج رتابة كل من (a_n) و (b_n)

ج- بين زن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متحاديتان.

د- حدد النهاية المشتركة للمتتاليتين (a_n) و (b_n)

1-أ- طبيعة المتتالية (v_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{a+b}(au_n + bu_{n+1}) - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{a+b}(au_n + bu_{n+1} - (a+b)u_{n+1})$$
$$= \frac{1}{a+b}(au_n - au_{n+1})$$
$$= \frac{a}{a+b}(u_n - u_{n+1})$$
$$= \frac{-a}{a+b} v_n$$

إذن $v_{n+1} = \frac{-a}{a+b} v_n \quad \forall n \in IN$

ومنه (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{-a}{a+b}$

ب- الحد العام للمتتالية (u_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$$u_{k+1} - u_k = v_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$$

ومنه $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

أي $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

بمعنى أن $\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

أي $u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

إذن $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

لدينا (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{-a}{a+b}$ وحدها الاول v_0 حيث $v_n = u_1 - u_0$

ومنه $\forall n \in IN^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{-a}{a+b}\right)^n}{1 - \left(-\frac{a}{a+b}\right)}$$
$$= \frac{a+b}{2a+b}(u_1 - u_0)\left(1 - \left(\frac{-a}{a+b}\right)^n\right)$$
$$= \frac{a+b}{2a+b}(u_1 - u_0) - \frac{a+b}{2a+b}(u_1 - u_0)\left(-\frac{a}{a+b}\right)^n$$

ومنه $u_n = u_0 + \frac{a+b}{2a+b}(u_1 - u_0) - \frac{a+b}{2a+b}(u_1 - u_0)\left(\frac{-a}{a+b}\right)^n$

أي $u_n = \frac{au_0 + (a+b)u_1}{2a+b} - \frac{(a+b)(u_1 - u_0)}{2a+b}\left(-\frac{a}{a+b}\right)^n$

ج- تقارب المتتالية (u_n)

نضع $\alpha = \frac{au_0 + (a+b)u_1}{2a+b}$ و $\beta = \frac{(a+b)(u_1 - u_0)}{2a+b}$

وحسب السؤال السابق لدينا $u_n = \alpha - \beta\left(-\frac{a}{a+b}\right)^n \quad \forall n \in IN$

بما أن $a > 0$ و $b > 0$ فإن $\left|\frac{a}{a+b}\right| < 1$ ومنه المتتالية $\left(\left(-\frac{a}{a+b}\right)^n\right)_{n \ge 0}$ متقاربة ومنه (u_n) متقاربة (كمجموع متتاليتين متقاربتين)

ولدينا $\lim u_n = \alpha - \beta \lim\left(-\frac{a}{a+b}\right)^n$
$= \alpha$

أي $\lim u_n = \frac{au_0 + (a+b)u_1}{2a+b}$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN. لدينا

$a_n = \inf (u_n , u_{n+1})$ و $b_n = \sup (u_n , u_{n+1})$

ومنه $a_n \le u_n \le b_n$ و $a_n \le u_{n+1} \le b_n$

وبما أ ن $b > 0$ و $a > 0$ فإن

$a\, a_n \le a\, u_n \le a\, b_n$ و $b\, a_n \le b\, u_{n+1} \le b\, b_n$

ومنه $(a + b)\, a_n \le a\, u_n + b\, u_{n+1} \le (a + b)\, b_n$

أي $(a + b)\, a_n \le (a + b)\, u_{n+2} \le (a + b)\, b_n$

إذن $a_n \le u_{n+2} \le b_n$

وبالتالي فإن $a_n \le u_{n+2} \le b_n \quad \forall n \in IN$

ب- رتابة المتتالية (u_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا :

$a_n = \inf (u_n , u_{n+1})$ و $a_{n+1} = \inf (u_{n+1} , u_{n+2})$

لدينا $a_n = u_n$ أو $a_n = u_{n+1}$

إذا كان $a_n = u_{n+1}$ فإنه حسب السؤال السابق لدينا $u_{n+1} \le u_{n+2}$

ومنه $a_{n+1} = u_{n+1}$ إذن $a_{n+1} = a_n$

إذا كان $a_n = u_n$ فإن $u_n \le u_{n+1}$ و $u_n \le u_{n+2}$ (لان $a_n \le u_{n+2}$)

ومنه $u_n \le \inf (u_{n+1} , u_{n+2})$ أي $a_n \le a_{n+1}$

إذن $a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in IN$

وهذا يعني أن المتتالية (a_n) تزايدية .

رتابة المتتالية (b_n)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا :

$b_n = \sup (u_n , u_{n+1})$ و $b_{n+1} = \sup (u_{n+1} , u_{n+2})$

لدينا $b_n = u_n$ أو $b_n = u_{n+1}$

إذا كان $b_n = u_{n+1}$ فإنه حسب السؤال السابق لدينا $u_{n+2} \le u_{n+1}$

ومنه $b_{n+1} = u_{n+1}$ إذن $b_n = b_{n+1}$

إذا كان $b_n = u_n$ فإن $u_{n+1} \le u_n$ و $u_{n+2} \le u_n$ (لان $u_{n+2} \le b_n$)

ومنه $\sup (u_{n+2} , u_{n+1}) \le u_n$ أي $b_{n+1} \le b_n$

إذن $b_{n+1} \le b_n \quad \forall n \in IN$

وهذا يعني أن المتتالية (b_n) تناقصية .

ج- المتتاليتان (a_n) و (b_n) متحاديتان

لدينا $a_n \le b_n \quad \forall n \in IN$ (أنظر السؤال الثاني الجزء أ منه)

- المتتالية (a_n) تزايدية
- المتتالية (b_n) تناقصية

بقي أن نبين أن $\lim (b_n - a_n) = 0$

ليكن n عنصرا من IN لدينا.

$a_n = \inf (u_1 , u_{n+1})$ و $b_n = \sup (u_n , u_{n+1})$

ومنه إذا كان $a_n = u_n$ إن $b_n = u_{n+1}$

وإذا كان $a_n = u_{n+1}$ فإن $b_n = u_n$

ومنه $b_n - a_n = |u_{n+1} - u_n|$

$= |v_n|$

حيث (v_n) هي المتتالية المعرفة في السؤال الأول.

وبما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{-a}{a+b}$ وأن $\left|\frac{-a}{a+b}\right| < 1$ فإن

$\lim v_n = 0$

ومنه $\lim |v_n| = 0$ أي $\lim (b_n - a_n) = 0$

إذن المتتاليتان (a_n) و (b_n) متحاديتان.

د- النهاية المشتركة للمتتاليتين (a_n) و (b_n)

ليكن n عنصرا من IN . لدينا

$a_n = \inf (u_n , u_{n+1})$ و $b_n = \sup (u_n , u_{n+1})$

ومنه $a_n \le u_n \le b_n$

إذن $a_n \le u_n \le b_n \quad \forall n \in IN$

ومنه $\lim a_n \le \lim u_n \le \lim b_n$

وبما أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متحاديتان فإن $\lim a_n = \lim u_n$

وحسب السؤال الاول الجزء منه يكون لدينا

$$\lim a_n = \lim b_n = \frac{a\, u_0 + (a+b)\, u_1}{2a + b}$$

* * * *

36

نعتبر المتتالية العددية المعرف $(u_n)_{n\ge2}$ بما يلي

$u_n = \sqrt[n]{a} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

حيث a عدد حقيقي موجب قطعا

1 نفترض أن $a \ge 1$.

أ - بين أن $0 \le u_n - 1 < \frac{a}{n} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

ب - استنتج $\lim \sqrt[n]{a}$

2- حسب نهاية $(u_n)_{n\ge2}$ إذا كان

1 - أ - اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$ لدينا

$$0 \le u_n - 1 \le \frac{a}{n} \iff 1 \le \sqrt[n]{a} < \frac{a}{n} + 1$$

$$\iff 1^n \le (\sqrt[n]{a})^n < \left(\frac{a}{n} + 1\right)^n$$

$$\iff 1 \le a < \left(\frac{a}{n} + 1\right)^n$$

ولدينا $\left(\frac{a}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{n}\right)^k$

$$= C_n^o \left(\frac{a}{n}\right)^o + C_n^1 \left(\frac{a}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{n}\right)^k$$

$$= 1 + a + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{k}\right)^n$$

وبما أن $\sum_{k=2}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{k}\right)^n > 0$ فإن $1 + a \le \left(\frac{a}{n} + 1\right)^n$

ومنه $1 + a > a$ فإن $a < \left(\frac{a}{n} + 1\right)^n$

وبما أن $a \ge 1$ فإن العبارة $1 \le a < \left(\frac{a}{n} + 1\right)^n$ صحيحة

ومنه $0 \le u_n - 1 < \frac{a}{n}$

إذن $0 \le u_n - 1 < \frac{a}{n} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

ب – الاستنتاج

لدينا $0 \le u_n - 1 < \frac{a}{n} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

وبما أن $\lim \frac{a}{n} = 0$ فإن $\lim u_n = 1$ أي $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

2- حساب نهاية (u_n) في حالة $a < 1$

لدينا $a < 1$ ومنه $\frac{1}{a} > 1$

وحسب السؤال السابق لدينا

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$$

وبما أن $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in IN^* - \{1\}$

فإن $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim \frac{1}{u_n}$

ومنه $\lim u_n = 1$

3 الاشتقاق

- مراجعة
- مشتقة مركب دالتين
- مشتقة الدالة العكسية
- مشتقات الدوال Arcsin ، Arccos ، Arctan

$(r \in \mathbb{Q}) \quad x \longrightarrow (u(x))^r$
- الدوال الأصلية
- مبرهنة رول ومبرهنة التزايدات المنتهية
- تطبيقات على بعض المتفاوتات والمعادلات

1

لتكن f دالة عددية معرفة في IR بحيث

$$\begin{cases} f \text{ قابلة للاشتقاق في } 0 \\ \forall (x, y) \in IR^2 \quad f(x+y)= f (x) + f (y) + x y \end{cases}$$

1- ليكن x عنصرا من IR و h عنصرا من IR* . بين أن

$$\frac{f (x + h) - f (x)}{h} = \frac{f (h) - f (0)}{h} + x$$

2- استنتج أن قابلة للاشتقاق على IR وأن

$$\forall x \in IR \quad f '(x) = x + f '(0)$$

1- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $f (x + h) = f (x) + f (h) + x h$

ومنه $f (x + h) - f (x) = f (h) + x h$

نلاحظ أن $f (0 + 0) = f(0)+ f (0) + 0.0$ أي $f(0) = 2f(0)$

ومنه $f(0) = 0$

إذن $f(x + h) - f (x) = f (h) - f (0) + x h$

ومنه $\dfrac{f (x + h) - f (x)}{h} = \dfrac{f (h) - f (0)}{h} + x$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR و h عنصرا من IR* . لدينا

$$\frac{f (x + h) - f (x)}{h} = \frac{f (h) - f (0)}{h} + x$$

وبما أن f قابلة للاشتقاق في 0 فإن $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f (h) - f(0)}{h} = f ' (0)$

إذن $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f (x + h) - f (x)}{h} = f ' (0) + x$

ومنه f قابلة للاشتقاق في x

وبالتالي فإن f قابلة للاشتقاق على IR وأن $\forall x \in IR \quad f '(x) = f '(0) + x$

* * * *

2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I مفتوح مركزه a وقابلة للاشتقاق في a

1- احسب $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a\ f(x) - x\ f (a)}{x - a}$

2- تطبيق : أحسب $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\pi \cos x + x}{x - \pi}$

1- حساب النهاية المقترحة

ليكن x عنصرا من $I - \{a\}$ لدينا

$$a\ f (x) - x f (a) = a (f (x) - f (a)) + a f (a) - x f (a)$$
$$= a (f (x) - f (a)) - f (a) (x - a)$$

ومنه $\dfrac{a\ f (x) - x f (a)}{x - a} = a. \dfrac{f (x) - f (a)}{x - a} - f (a)$

وبما أن f قابلة للاشتقاق في a فإن $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f (x) - f (a)}{x - a} = f '(a)$

ومنه $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a f (x) - x\ f (a)}{x - a} = a f '(a) - f (a)$

2- تطبيق

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in]0, 2 \pi[\quad f (x) = \cos x$$

ليكن x عنصرا من $]0, 2\pi[- \{\pi\}$ لدينا

$$\frac{\pi \cos x + x}{x - \pi} = \frac{\pi f (x) - x\ f(\pi)}{x - \pi}$$

وحسب السؤال الأول لدينا

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\pi \cos x + x}{x - \pi} = \pi f '(\pi) - f (\pi)$$
$$= \pi (- \sin \pi) - \cos \pi$$
$$= 1$$

* * * *

3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f (x) = \frac{1}{x} (x + \alpha)^3$$

حيث α عدد حقيقي موجب قطعا

1- أ- ادرس رتابة الدالة f

ب- استنتج أن $f(x) \geq \dfrac{27}{4} \alpha^2 \quad \forall x \in IR_*^+$

2- ليكن a و b و c أعدادا حقيقية موجبة قطعا.

أ- بين أن $\dfrac{1}{4} a (b + c)^2 \leq \left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^3$

ب- متى يكون التساوي ؟

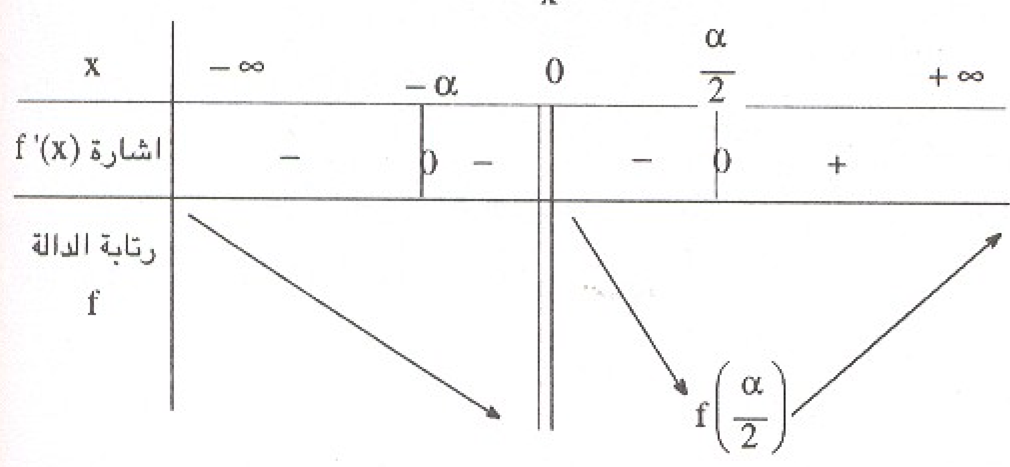
1- أ- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR* لأنها دالة جذرية

ليكن x عنصرا من IR*

لدينا $f '(x) = - \dfrac{1}{x^2} (x + \alpha)^3 + \dfrac{1}{x} 3 (x + \alpha)^2$

$$= \frac{(x + \alpha)^2}{x} \left(3 - \frac{x + \alpha}{x}\right)$$
$$= \frac{(x + \alpha)^2}{x^2} (2 x - \alpha)$$



ب- الاستنتاج

لدينا f تناقصية قطعا على $\left]0, \dfrac{\alpha}{2}\right]$

f تزايدية قطعا على $\left[\dfrac{\alpha}{2}, + \infty\right[$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad f(x) \ge f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

ولدينا $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\right)^3$

$= \frac{27}{4}\alpha^2$

إذن $\forall x \in IR_+^* \quad f(x) \ge \frac{27}{4}\alpha^2$

2-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $\frac{1}{4} a (b+c)^2 \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{27}{4}(b+c)^2 \le \frac{1}{a}(a+b+c)^3$

نضع $\alpha = b + c$ ويكون لدينا

$$\frac{1}{4} a (b+c)^2 \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{27}{4}\alpha^2 \le f(a)$$

وبما أن $a \in IR_+^*$ فإنه حسب السؤال الأول الجزء ب العبارة $\frac{27}{4}\alpha^2 \le f(a)$

صحيحة ومنه $\frac{1}{4} a (b+c)^2 \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

ب- متى يكون التساوي ؟

لدينا $\frac{1}{4} a (b+c)^2 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{27}{4}\alpha^2 = f(a)$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f(a)$

وبما أن $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) < f(x)$ $\forall x \in IR_+^* - \left\{\frac{\alpha}{2}\right\}$ فإن

$f(\alpha) = f(a) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = a$

$\Leftrightarrow a = \frac{b+c}{2}$

إذن يكون التساوي إذا وفقط إذا كان $2a = b + c$

* * * *

4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x) = \cos x . \sqrt{\sin x}$

1- ادرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0

2- أ- حدد الدالة المشتقة للدالة f

ب- بين أن $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x) \le \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$

1- قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\cos x \sqrt{\sin x}}{x}$

$= \cos x . \sqrt{\frac{\sin x}{x} . \frac{1}{x}}$

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty$

وبما أن $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ فإن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في 0

2-أ- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ لدينا

$$f'(x) = (-\sin x)\sqrt{\sin x} + \cos x . \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}(-2\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= \frac{-2 + 3\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x}}$$

إذن $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f'(x) = \frac{-2 + 3\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x}}$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

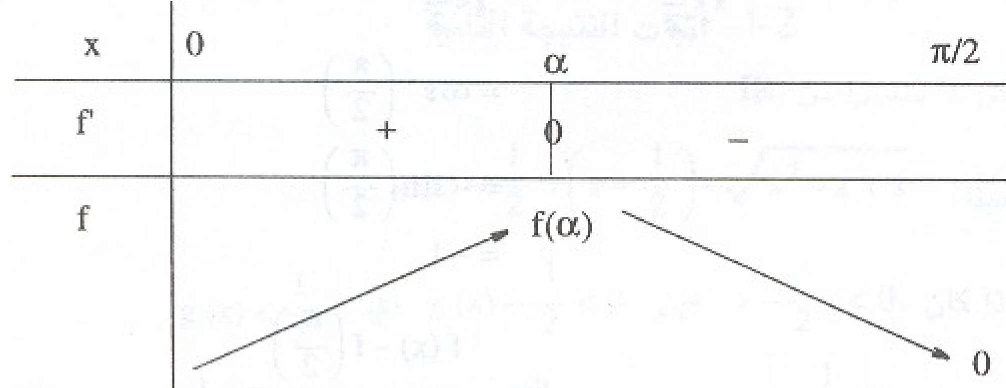
لدينا $f'(x) = \Leftrightarrow -2 + 3\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow x = \text{Arc}\cos\sqrt{\frac{2}{3}}$

نضع $\alpha = \text{Arc}\cos\sqrt{\frac{2}{3}}$ ويكون لدينا



ومنه $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x) \le f(\alpha)$

لدينا $f(a) = \cos\alpha\sqrt{\sin\alpha}$

وبما أن $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin\alpha > 0$

ومنه $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$= \sqrt{1 - \frac{2}{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

إذن
$$f(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$$

وبالتالي فإن $\quad f(x)\le\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

* * * *

5

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\forall x\in\,]0,\pi[\qquad f(x)=|\cos x|\sqrt{1-\cos x}$$

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $\frac{\pi}{2}$

2- بين أنه مهما يكن x من $]0,\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ فإن

$$2f(x)f'(x)=\sin 2x\left(\frac{3}{2}\cos x-1\right)$$

3- بين أن $\quad f(x)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\qquad\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1- قابلية اشتقاق f في $\frac{\pi}{2}$

ليكن x عنصرا من $]0,\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

لدينا
$$\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{|\cos x|\sqrt{1-\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}$$

إذا كان $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos x>0$ ومنه

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

علما أن $\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}=1$

إذا كان $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ فإن $\cos x<0$ ومنه

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}-\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=1$$

إذن
$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=1$$

وبما أن
$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\neq\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $\frac{\pi}{2}$

2- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من $]0,\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ لدينا

$$\begin{aligned}(f(x))^2&=|\cos x|^2(1-\cos x)\\&=\cos^2 x(1-\cos x)\\&=-\cos^3 x+\cos^2 x\end{aligned}$$

ونعلم أن $(f^2)'=2ff'$ ومنه

$$\begin{aligned}2f(x)f'(x)&=-3\cos^2 x(-\sin x)+2\cos x(-\sin x)\\&=3\cos x.\cos x\sin x-2\cos x.\sin x\\&=\frac{3}{2}\cos x.\sin 2x-\sin 2x\\&=\sin 2x\left(\frac{3}{2}\cos x-1\right)\end{aligned}$$

إذن $\quad 2f(x)f'(x)=\sin 2x\left(\frac{3}{2}\cos-1\right)\qquad\forall x\in\,]0,\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

3- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا $f(x)>0$

ومنه
$$\begin{aligned}f'(x)=0&\Leftrightarrow\sin 2x\left(\frac{3}{2}\cos x-1\right)=0\\&\Leftrightarrow\sin 2x=0\ \text{أو}\ \cos x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

وبما أن $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن $0<2x<\pi$ ومنه $\sin 2x\neq 0$

إذن
$$\begin{aligned}f'(x)=0&\Leftrightarrow\cos x=\frac{2}{3}\\&\Leftrightarrow x=\text{Arc}\cos\frac{2}{3}\end{aligned}$$

x	0		$\text{Arc}\cos\frac{2}{3}$		$\pi/2$
f'(x)		+	0	−	
f	0	↗	$f\left(\text{Arc}\cos\frac{2}{3}\right)$	↘	0

ومنه $\quad f(x)\le f\left(\text{Arc}\cos\frac{2}{3}\right)\qquad\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

ولدينا
$$f\left(\text{Arv}\cos\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

إذن $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad f(x)\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}$

* * * *

6

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I مفتوح مركزه a وقابلة للاشتقاق في a .

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x)=f(a+x^2)$$

بين أن g قابلة للاشتقاق في 0 وحدد $g'(0)$

2- احسب : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^2)-f(a+x)}{x}$

1- الدالة g قابلة للاشتقاق في 0

نضع $I=]a-\alpha,a+\alpha[\quad(\alpha\in IR_+^*)$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$a+x^2\in I\Leftrightarrow a-\alpha<a+x^2<a+\alpha$$
$$\Leftrightarrow x^2<\alpha$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{\alpha}<x<\sqrt{\alpha}$$

إذن g معرفة على $]-\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}[$ وهو مجال مفتوح مركزه 0.

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي :

$$\forall x\in]-\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}[\qquad h(x)=x^2+a$$

لدينا $\forall x\in]-\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}[\qquad g(x)=f(h(x))$

ومنه $g=f\circ h$

لدينا h قابلة للاشتقاق في 0 لأنها قصور دالة حدودية

ولدينا f قابلة للاشتقاق في $h(0)$ (لأن $h(0)=a$)

ومنه g قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا

$$g'(0)=f'(h(0))\times h'(0)$$
$$=f'(0)\times 0$$
$$=0$$

لأن $\forall x\in]-\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}[\qquad h'(x)=2x$

إذن g قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا $g'(0)=0$

2- حساب النهاية المقترحة

ليكن x عنصرا من IR بحيث $a+x\in I$ و $a+x^2\in I$ لدينا

$$\frac{f(a+x^2)-f(a+x)}{x}=\frac{g(x)-g(0)+g(0)-f(a+x)}{x}$$
$$=\frac{g(x)-g(0)}{x}-\frac{f(a+x)-f(a)}{x}$$

حسب السؤال الأول لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$$

ولدينا
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}=\lim_{X\to a}\frac{f(X)-f(a)}{X-a}$$
$$=f'(a)$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^2)-f(a+x)}{x}=-f'(a)$

* * * *

7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$$

ونعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$g(x)=x-\sqrt{x^2-x+1}$$

1- بين أن $(\forall x\in IR)\ |f(x)|=\sqrt{2g(x^2+1)}$

2- أ- بين أن $\forall x\in IR\quad g(x)<\frac{1}{2}$

ب- استنتج أن $\forall x\in IR\quad g'(x)>0$

3- ادرس رتابة الدالة f .

1- اثبات النتيجة الأولى

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$(f(x))^2=(x^2+x+1)+(x^2-x+1)-2\sqrt{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}$$
$$=2x^2+2-2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}$$
$$=2\left[x^2+1-\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2+1)+1}\right]$$
$$=2g(x^2+1)$$

إذن $|f(x)|=\sqrt{2g(x^2+1)}$

وبالتالي فان $(\forall x\in IR)\quad |f(x)|=\sqrt{2g(x^2+1)}$

2-أ- اثبات النتيجة الثانية

ليكن x عنصرا من IR

لدينا $g(x)-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2-x+1}$

إذا كان $x-\frac{1}{2}<0$ فان $g(x)-\frac{1}{2}<0$ أي $g(x)<\frac{1}{2}$

إذا كان $x-\frac{1}{2}\geq 0$ فان

$$g(x)-\frac{1}{2}<0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}<\sqrt{x^2-x+1}$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<x^2-x+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}<x^2-x+1$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}<1$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فان $g(x)<\frac{1}{2}$

إذن $\forall x \in IR \quad g(x) < \frac{1}{2}$

ب- الاستنتاج

الدالة g قابلة للاشتقاق على IR .

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$g'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x^2-x+1} - 2x + 1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{-2g(x)+1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

بما أن $g(x) < \frac{1}{2}$ فإن $-2g(x)+1 > 0$

إذن $\forall x \in IR \quad g'(x) > 0$

3- رتابة الدالة f

نلاحظ أن الدالة f فردية لأنه إذا كان x عنصرا من IR فإن

$$f(-x) = \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+x+1}$$
$$= -f(x)$$

ونلاحظ أنه إذا كان $x > 0$ فإن $x^2 - x + 1 < x^2 + x + 1$

ومنه $f(x) > 0$

وحسب السؤال الأول يكون لدينا

$$\forall x \in IR^+ \quad f(x) = \sqrt{2\,g(x^2+1)}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على IR^+ ولدينا $\forall x \in IR^+_* \quad g(x^2+1) > 0$ (أنظر الملاحظة)

ومنه f قابلة للاشتقاق على IR^+_*

ليكن x عنصرا من IR^+_* لدينا

$$f'(x) = \frac{2.\,2x\,g'(x^2+1)}{2\sqrt{2\,g(x^2+1)}}$$
$$= \frac{2x\,g'(x^2+1)}{\sqrt{2\,g(x^2+1)}}$$

لدينا $g(x^2+1) > 0$ (حسب السؤال الثاني الجزء ب منه)

ومنه $\forall x \in IR^+_* \quad f'(x) > 0$

إذن الدالة f تزايدية قطعا على IR^+

وبما أنها فردية فإن f تزايدية قطعا على IR^-

ملاحظة : ليكن x عنصرا من IR^+_* لدينا :

$$g(x^2+1) > 0 \Leftrightarrow x^2+1 - \sqrt{(x^2+1)^2 - x^2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)^2 - x^2} < x^2+1$$
$$\Leftrightarrow -x^2 < 0$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $g(x^2+1) > 0$

* * * *

8

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \text{Arc}\sin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

ب- ادرس اشتقاق الدالة على اليمين في 0

2- أ- حدد الدالة المشتقة للدالة f

ب- ادرس رتابة الدالة f

3- بين أن $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$

1- تحديد المجموعة

ليكن x عنصرا من IR

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow |x-1| \leq |x+1| \text{ و } x \neq -1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow -2x \leq 2x$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 4x$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq x$$

إذن $D = [0, +\infty[$

ب- قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x) - \text{Arc}\sin(-1)}{x}$$
$$= \frac{f(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$
$$= \frac{1}{x}\left(\text{Arc}\sin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

نضع $X = \frac{x-1}{x+1}$ ومنه $x = \frac{1+X}{1-X}$

إذن

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1-X}{1+X}\left(\text{Arc}\sin X + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (1-X)\,.\,\frac{\text{Arcsin}\,X - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{X-(-1)}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{X \to -1 \\ X > -1}} (1-X)\,.\,\frac{\text{Arc}\sin X - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{X-(-1)}$$
$$= +\infty$$

لأن

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{\text{Arc}\sin X - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{X-(-1)} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

9	نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x) = x \text{ Arc sin} \sqrt{1-x^2}$ 1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f ب- ادرس اشتقاق الدالة f في 0 2- حدد الدالة المشتقة 'f للدالة f 3- أ- ادرس تغيرات الدالة 'f ب- استنتج أن $\exists!\ \alpha \in]0, 1[\quad f'(\alpha) = 0$ 4- حدد جدول تغيرات الدالة f

1- أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \text{ و } -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

إذن $D = [-1, 1]$

ب- اشتقاق الدالة f في 0

ليكن x عنصرا من $[-1, 1] - \{0\}$

لدينا
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \text{ Arcsin}\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$= \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$

ومنه
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$
$$= \text{Arcsin} = 1$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0) = \frac{\pi}{2}$

2- الدالة المشتقة الأولى للدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[- \{0\}$ لدينا :

$$f'(x) = \text{Arc sin}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \quad (1-x^2)}}$$

$$= \text{Arc sin}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{|x|}$$

إذن
$$f'(x) = \begin{cases} \text{Arc sin}\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & ; 0 < x < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & ; x = 0 \\ \text{Arc sin}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & ; -1 < x < 0 \end{cases}$$

2- أ- الدالة المشتقة للدالة f

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

لدينا $f = \text{Arc sin } 0\ g$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا إذن :
$$f'(x) = \text{Arc sin}'(g(x)) \times g'(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \times g'(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \times \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x+1}{\sqrt{4x}} \times \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

إذن
$$\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

ب- رتابة الدالة f

لدينا
$$\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعا على +IR

3- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$ لدينا :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{\sqrt{x}(x+1) - 2}{(x+1)\sqrt{x}}$$

بما أن $x > 1$ فإن $x + 1 > 2$ و $\sqrt{x} > 1$

ومنه $\sqrt{x}(x+1) - 2 > 0$ أي $g'(x) < 0$

إذن الدالة g تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$

ومنه $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \leq g(1)$

ولدينا $g(1) = -\frac{1}{2}$

إذن $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \leq -\frac{1}{2}$

أي $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$

3- تغيرات الدالة f '

* ليكن x عنصرا من $]-1, 1[- \{0\}$

لدينا
$$f'(x) = \text{Arc}\sin\sqrt{1-(-x)^2} - \frac{(-x)^2}{\sqrt{1-(-x^2)}}\cdot\frac{1}{|x|}$$
$$= \text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{|x|}$$
$$= f'(x)$$

ولدينا $f'(0) = f'(-0)$

إذن الدالة f ' زوجية. لهذا يكفي دراسة تغيراتها على $[0, 1[$.

* لدينا $\forall x \in]0, 1[\quad f'(x) = \text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$

$$f''(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{\sqrt{1-x^2} - x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{x} - \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(1+\frac{1}{1-x^2}\right)$$
$$= -\frac{2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

وبما أن $x < 1$ فإن $2 - x^2 > 0$ ومنه $f''(x) \leq 0$

إذن f ' تناقصية قطعا على $]0, 1[$

* لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} = \text{Arc}\sin 0 = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = -\infty$

* ليكن x عنصرا من $]0, 1[$

لدينا
$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x}\left(\text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

نضع $\alpha = \text{Arc}\cos x \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ومنه

إذن
$$\text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} = \text{Arc}\sin(\sin\alpha) = \alpha$$

إذن
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\left(\text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{\alpha\to \frac{\pi}{2}\\ \alpha<\frac{\pi}{2}}} \frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{\cos\alpha}$$

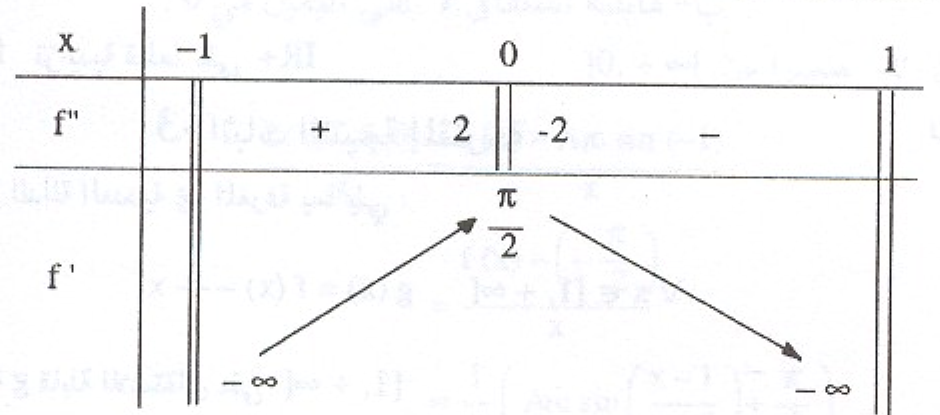
ولدينا
$$\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ \alpha<\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{2}} = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\left(\text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

إذن
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = -2$$

وبما أن f ' زوجية فإن
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \frac{f'(X)-f'(0)}{-X} = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} -\frac{f'(X)-f'(0)}{X} = 2$$

* جدول تغيرات الدالة f '



ب- الاستنتاج

لدينا f ' متصلة على $]0, 1[$

f ' تناقصية قطعا على $]0, 1[$

ومنه f ' تقابل من $]0, 1[$ نحو $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$

وبما أن $0 \in \left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن

$$\exists!\, \alpha \in]0, 1[\quad f'(\alpha) = 0$$

4- تغيرات الدالة f

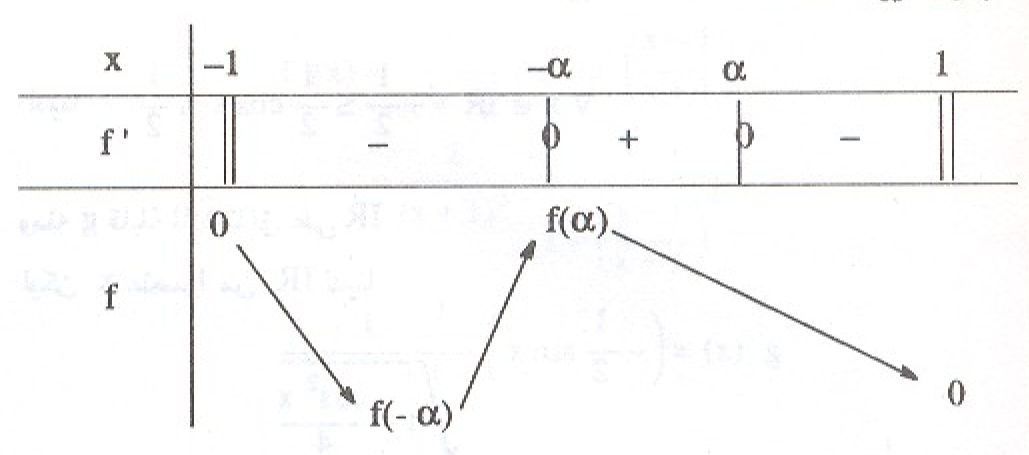
* نلاحظ أن f فردية ، لهذا يكفي دراسة تغيراتها على المجال $[0, 1]$

* لدينا $\exists!\, \alpha \in]0, 1[\quad f'(\alpha) = 0$ (أنظر السؤال السابق)

وبما أن f ' تناقصية قطعا على $[0, 1]$

فإن
$$\forall x \in [0, \alpha] \quad f'(\alpha) \geq 0$$
$$\forall x \in [\alpha, 1] \quad f'(\alpha) \leq 0$$

* جدول تغيرات الدالة f



لدينا $f'(\alpha) = 0$ ومنه

$$\text{Arc}\sin\sqrt{1-\alpha^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 0$$

إذن

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

ولدينا

$$f(-\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

* * * *

10

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{5}{3}\sqrt[5]{x}$$

ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 .

أ- ادرس منحنى تغيرات الدالة f .

ب- استنتج أن $-\frac{2}{3} \le f(x) \quad \forall x \in IR_+$

1- قابلية اشتقاق f على اليمين 0

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{x} - \frac{5}{3}\sqrt[5]{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[5]{x}}{x}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} - \frac{5}{3}\right)$$

لدينا

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{5}}$$

$$= x^{\frac{2}{15}}$$

$$= \sqrt[15]{x^2}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt[15]{x^2}$$

$$= 0$$

إذن

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

ولدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}$$

$$= +\infty$$

إذن

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

وبالتالي فإن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

2-أ- منحنى تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{1}{5}}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$$

$$= \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{-4}{5}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{x^{-2}} - \sqrt[5]{x^{-4}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}\right)$$

إذن

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x^4}} > 0$$

$$\iff \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} > \sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)^5 > \frac{1}{x^4}$$

$$\iff \frac{1}{x^2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)^2 > \frac{1}{x^4}$$

$$\iff \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}} > \frac{1}{x^2}$$

$$\iff \frac{1}{x^4} > \left(\frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$\iff 1 > \frac{1}{x^2}$$

$$\iff x > 1$$

وبالمثل لدينا $f'(x) < 0 \iff x < 1$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

إذن f تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$ وتناقصية قطعا على $[0, 1]$

ب- الاستنتاج

لدينا f تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$ ومنه

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) \ge f(1)$$

ولدينا f تناقصية قطعا على $[0, 1]$ ومنه

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \ge f(1)$$

إذن $\forall x \in IR^+ \quad f(x) \ge f(1)$ أي $\forall x \in IR^+ \quad f(x) \ge -\frac{2}{3}$

* * * *

11

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{2-\cos x}{2+\cos x}}$$

1- بين أنه مهما يكن x من IR فإن

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right)$$

حدد الدالة المشتقة للدالة g

3- استنتج أنه مهما يكن x من IR فإن

$$f(x) = -\frac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right) + \frac{\pi}{4}$$

1- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f(x) = \text{Arctan}\, u(x)$$

حيث u هي الدالة المعرفة بما يلي :

$$u(x) = \sqrt{\frac{2-\cos x}{2+\cos x}}$$

ومنه

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{1+u^2(x)}$$

لدينا

$$u^2(x) = \frac{2-\cos x}{2+\cos x} = \frac{4-(2+\cos x)}{2+\cos x} = \frac{4}{2+\cos x} - 1$$

ومنه

$$2u(x)u'(x) = \frac{-4(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$

إذن

$$u'(x) = \frac{2\sin x}{(2+\cos x)^2} \cdot \frac{1}{u(x)}$$

ولدينا

$$1+u^2(x) = 1 + \frac{2-\cos x}{2+\cos x} = \frac{4}{2+\cos x}$$

إذن

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{(2+\cos x)^2} \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{2+\cos x}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{2+\cos x} \cdot \sqrt{\frac{2+\cos x}{2-\cos x}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+\cos x}{(2-\cos x)(2+\cos x)^2}}\,\sin x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

وبالتالي فإن

$$\forall x \in IR \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

2- الدالة المشتقة للدالة g

لدينا

$$\forall x \in IR \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على IR .

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$g'(x) = \left(-\frac{1}{2}\sin x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{4}}}$$

$$= \frac{-\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

إذن

$$\forall x \in IR \quad g'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

3- الاستنتاج

لدينا

$$\forall x \in IR \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

$$\forall x \in IR \quad \frac{1}{2}g'(x) = \frac{1}{2}\frac{-\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

ومنه

$$\forall x \in IR \quad f'(x) + \frac{1}{2}g'(x) = 0$$

أي

$$\forall x \in IR \quad \left(f + \frac{1}{2}g\right)'(x) = 0$$

ومنه

$$\forall x \in IR \quad \left(f+\frac{1}{2}g\right)(x) = \left(f+\frac{1}{2}g\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

لدينا

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Arc}\sin 0 = 0$$

ومنه

$$\forall x \in IR \quad \left(f+\frac{1}{2}g\right)(x) = \frac{\pi}{4}$$

إذن

$$\forall x \in IR \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}g(x)$$

أي

$$\forall x \in IR \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right)$$

* * * *

12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1- حدد الدالة المشتقة للدالة f

2- استنتج أن :

أ- $\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = \text{Arctan}\,x - \frac{\pi}{4}$

ب- $\forall x \in]-\infty, -1[\quad f(x) = \text{Arctan}\,x + \frac{3\pi}{4}$

1- الدالة المشتقة للدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $IR - \{-1\}$

ليكن x عنصرا من $IR - \{-1\}$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \text{Arctan}'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

إذن $\forall x \in IR - \{-1\} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2- أ- الاستنتاج الأول

لدينا $\forall x \in]-1, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

أي $f' = \text{Arctan}'$

إذن $(f - \text{Arctan})' = 0$

ومنه $\forall x \in]-1, +\infty[\ (f - \text{Arctan})(x) = (f - \text{Arctan})(0)$

وبما أن $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ و $\text{Arctan } 0 = 0$ فإن

إذن $\forall x \in]-1, +\infty[\ f(x) = \text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}$

ب- الاستنتاج الثاني

لدينا $\forall x \in]-\infty, -1[\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ومنه $(\exists \alpha \in IR)(\forall x \in]-\infty, -1[) \ f(x) = \text{Arctan } x + \alpha$

إذن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (\text{Arctan } x + \alpha)$

$$= -\frac{\pi}{2} + \alpha$$

وبما أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to 1} \text{Arctan } X$

$$= \frac{\pi}{4}$$

فإن $\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \alpha$ أي $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

إذن $\forall x \in]-\infty, -1[\quad f(x) = \text{Arctan } x + \frac{3\pi}{4}$

* * * *

13

نربط كل عدد حقيقي a غير منعدم بالدالة العددية f_a المعرفة بما يلي :

$$f_a(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$$

1- ليكن a عنصرا من IR^*

أ- حدد الدالة المشتقة للدالة f_a

ب- بين أنه مهما يكن x عنصرا من $IR - \left\{-\frac{1}{a}\right\}$ فإن

$$f_{-a}(x) = -f_a(-x)$$

2- ليكن a عنصرا من IR^*_+

أ- بين أنه مهما يكن x من $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ فإن

$$f_a(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } a$$

ب- بين أن $\text{Arctan } a + \text{Arctan } \frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2}$

ج- استنتج أنه مهما يكن x من $\left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$ فإن

استنتج $f_a(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } a + \pi$

3- استنتج أنه مهما يكن x و y من IR بحيث $xy \neq 1$ فإن

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } y + \varepsilon\pi$$

حيث $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$

1- أ- الدالة المشتقة للدالة f_a

ليكن x عنصرا من $IR - \left\{\frac{1}{a}\right\}$ لدينا

$$f(x) = \text{Arctan } u(x)$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$u(x) = \frac{x+a}{1-ax}$$

ومنه $f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{1+u^2(x)}$

لدينا
$$u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{1+a^2}{(1-ax)^2}$$

ولدينا
$$1+u^2(x) = 1 + \frac{(a+x)^2}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{(1-ax)^2 + (a+x)^2}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{1+a^2x^2+a^2+x^2}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{(1+a^2)(1+x^2)}{(1-ax)^2}$$

ومنه $f'_a(x) = \frac{1}{1+x^2}$

إذن $\forall x \in IR - \left\{\frac{1}{a}\right\} \quad f'_a(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR يخالف $-\frac{1}{a}$ لدينا $f_{-a}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{-a+x}{1+ax}\right)$

$$= \text{Arctan}\left(-\frac{a+(-x)}{1-a(-x)}\right)$$

$$= -\text{Arctan}\left(\frac{a+(-x)}{1-a(-x)}\right)$$

$$= -f_a(-x)$$

إذن $\forall x \in IR - \left\{-\frac{1}{a}\right\} \quad f_{-a}(x) = -f_a(-x)$

2- أ- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا $\forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad f'_a(x) = \frac{1}{1+x^2}$

أي $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\right) f'_a(x) = \text{Arctan}'(x)$

ومنه $(\exists \alpha \in IR) \quad \forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad f_a(x) = \text{Arctan } x + \alpha$

بما أن $a < 0$ فإن $0 \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ ومنه

$$f_a(0) = \text{Arctan } 0 + \alpha$$

أي

$$\alpha = f_a(0) = \text{Arctan } a$$

إذن $\forall x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad f_a(x) = \text{Actan } x + \text{Arctan } a$

ب- اثبات المتساوية المقترحة

نضع $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } a$

لدينا $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan } a < 0$ لأن $a < 0$ ومنه

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } a < 0$$

لدينا

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } a\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan } a\right) = \frac{1}{\tan(\text{Arctan } a)} = \frac{1}{a}$$

ومنه $-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } a = \text{Arctan } \frac{1}{a}$

إذن $\text{Arctan } \frac{1}{a} + \text{Arctan } a = -\frac{\pi}{2}$

ج- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\quad f'_a(x) = \text{Arctan}'(x)$

ومنه $(\exists \alpha \in IR) \quad \left(\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\right) f_a(x) = \text{Arctan } x + \alpha$

إذن

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} (\text{Arctan } x + \alpha) = -\frac{\pi}{2} + \alpha$$

وبما أن

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \text{Arctan}\left(-\frac{1}{a}\right) = -\text{Arctan } \frac{1}{a}$$

فإن $-\frac{\pi}{2} + \alpha = -\text{Arctan } \frac{1}{a}$

وحسب السؤال السابق لدينا

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } a\right) = \pi + \text{Arctan } a$$

إذن $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\quad f_a(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } a + \pi$

3- الاستنتاج

ليكن x و y عنصرين من IR بحيث $xy \neq 1$

إذا كان $x = 0$ فإن

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan } y$$

نفترض أن $x < 0$ لدينا

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f_x(y)$$

وحسب السؤال الثاني لدينا

$$f_x(y) = \text{Arctan } y + \text{Arctan } x + \varepsilon\pi$$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

إذن $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } y + \varepsilon\pi$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

نفترض أن $x > 0$ لدينا

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f_x(y) = -f_{-x}(-y)$$

وذلك حسب السؤال الأول الجزء ب منه.

وحسب السؤال الثاني لدينا

$$f_{-x}(-y) = \text{Arctan}(-x) + \text{Arctan}(-y) + \varepsilon\pi$$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

ومنه $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } y - \varepsilon\pi$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = 1$

أي $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } y + \varepsilon\pi$

حيث $\varepsilon = 0$ أو $\varepsilon = -1$.

وبالتالي فإن مهما يكن x و y من IR بحيث $xy \neq 1$ فإن

$$\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } y + \varepsilon\pi$$

حيث $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$

* * * *

14

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

1- بين أن f تقابل من IR نحو IR^+

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$(\forall x \in IR_+^*) \quad g(x) = x f^{-1}(x)$$

أ- بين أنه مهما يكن x عنصرا من IR فإن

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

ب- استنتج أن $\forall x \in IR_+^* \quad g'(x) = x$

ج- استنتج $f^{-1}(x)$ لكل x من IR_+^*

1- الدالة f تقابل

* لدينا f متصلة على IR (لأنها مجموع دالتين متصلتين على IR)

* ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

لدينا $|x| < \sqrt{x^2+1}$ و $-x \le |x|$ ومنه $\sqrt{x^2+1} + x > 0$

ومنه $f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعا على IR

* ومنه f تقابل من IR نحو المجال I حيث $I =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= 0$$

وبالتالي فإن f تقابل من IR نحو IR_+^*

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

ولدينا $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ومنه

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

إذن $(\forall x \in IR)\ f'(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)-x}$

ب- الاستنتاج الأول

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا

$$g'(x) = f^{-1}(x) + x\,(f^{-1})'(x)$$

ولدينا

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

وحسب السؤال السابق لدينا

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{f(f^{-1}(x))}{f(f^{-1}(x)) - f^{-1}(x)}$$

$$= \frac{x}{x - f^{-1}(x)}$$

ومنه $(f^{-1})'(x) = \dfrac{x - f^{-1}(x)}{x}$

إذن

$$g'(x) = f^{-1}(x) + x \cdot \frac{x - f^{-1}(x)}{x}$$

$$= x$$

وبالتالي فإن $g'(x) = x \quad \forall x \in IR_+^*$

ج- الاستنتاج الثاني

لدينا $g'(x) = x \quad \forall x \in IR_+^*$

ومنه يوجد عدد حقيقي α بحيث

$$\forall x \in IR_+^* \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \alpha$$

لدينا $f(0) = 1$ أي $f^{-1}(1) = 0$ ومنه $g(1) = 0$

إذن $0 = \dfrac{1}{2} + \alpha$ أي $\alpha = -\dfrac{1}{2}$

ومنه

$$\forall x \in IR_+^* \quad x f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

أي

$$\forall x \in IR_+^* \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

* * * *

15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 3$$

1- أ- حدد الدالة العددية u بحيث

$$\forall x \in IR \quad f'(x) = 3u'(x)\,u^2(x)$$

ب- بين أن f تقابل من IR_+ نحو $[3, +\infty[$

2- ليكن f^{-1} التقابل العكسي للتقابل f .

حدد الدالة المشتقة للدالة f^{-1}

1-أ- تحديد الدالة العددية u

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

$$= 6x(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$= 6x(x^2+1)^2$$

إذا اعتبرنا الدالة العددية u المعرفة بما يلي

$$u(x) = x^2 + 1$$

نجد أن $\forall x \in IR \quad f'(x) = 3\,u'(x)\,u^2(x)$

ب- الدالة f تقابل

- لدينا f متصلة على IR_+ لأنها دالة حدودية

- لدينا $f'(x) = 6x(x^2+1)^2 \quad \forall x \in IR+$

ومن $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in IR+$

إذن f تزايدية قطعا على +IR

- ومنه f تقابل من +IR نحو المجال I حيث

$$I = [f(0), \lim_{+\infty} f[$$
$$= [3, +\infty[$$

2- التقابل العكسي للتقابل f

ليكن x عنصرا من $]3, +\infty[$ لدينا

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

لدينا $f'(x) = 3u'(x)u^2(x) \quad \forall x \in IR$

ومنه $f' = (u^3)'$

إذن $\exists \alpha \in IR \quad f = u^3 + \alpha$

لدينا $u(0) = 1$ و $f(0) = 3$ ومنه $\alpha = 3 - 1$ أي $\alpha = 2$

ومنه $f(x) = (x^2+1)^3 + 2 \quad \forall x \in IR$

ليكن y عنصرا من +IR لدينا

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$
$$\Leftrightarrow x = (y^2+1)^3 + 2$$
$$\Leftrightarrow (y^2+1)^3 = x - 2$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = \sqrt[3]{x-2}$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - 1}$$

ومنه $f^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - 1}$

إذن $f'(f^{-1}(x)) = 6\sqrt{\sqrt[3]{x-2} - 1}\,(\sqrt[3]{x-2})^2$

ومنه $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{\sqrt[3]{x-2} - 1}\,(\sqrt[3]{x-2})^2}$

* * * *

16

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على +IR بحيث

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 0 \\ \exists a \in IR_+^* \quad f(a) = 0 \end{cases}$$

1- بين أن $\exists b \in]0, a[\quad f'(b) = 0$

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

أ- بين أن g قابلة للاشتقاق على IR_+^*

ب- بين أن g متصلة على اليمين في 0

3- استنتج $f'(c) = c\,f'(c) \quad \exists b \in]0, b[$

1- وجود العدد b

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, a[$ لأنها قابلة للاشتقاق على IR_+ وأن $]0,a[\subset IR+$

وبما أن $f(a) = f(0)$ فإنه حسب مبرهنة رول لدينا

$$\exists b \in]0, a[\quad f'(b) = 0$$

2-أ- قابلية للاشتقاق للدالة g

لدينا f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

إذن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ب- الاتصال على اليمين في الصفر

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

$$= f'(0)$$
$$= 0$$
$$= g(0)$$

إذن الدالة g متصلة على اليمين في 0

3- الاستنتاج

لدينا g قابلة للاشتقاق على IR_+^* ومنه

- g قابلة للاشتقاق على $]0, b[$

- g متصلة على $]0, b]$

وبما أن g متصلة على اليمين في 0 فإن g متصلة على $[0, b]$

إذن : g قابلة للاشتقاق على $]0, b[$

g متصلة على $[0, b]$

وحسب مبرهنة رول لدينا

$$\exists c \in]0, b[\quad g'(c) = 0$$

ولدينا $g'(x) = \dfrac{x f'(x) - f(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0, b[$

ومنه $c f'(c) - f(c) = 0 \quad \exists c \in]0, b[$

أي $f(c) = c f'(c) \quad \exists c \in]0, b[$

* * * *

17

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على IR بحيث

$$\forall x \in IR \quad f'(x) \neq 0$$

1- بين أن f تطبيق تبايني

2- نفترض أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث $f'(\alpha) > 0$ و f' متصلة على IR

بين أن f تزايدية قطعا على IR .

1- التطبيق f تبايني

نفترض أن f غير تبايني

ومنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث $a < b$ و $f(a) = f(b)$

حسب مبرهنة رول لدينا

$$(\exists \alpha \in]a, b[) \quad f'(\alpha) = 0$$

وهذا يخالف معطى التمرين

إذن f تطبيق تبايني

-2 رتابة الدالة f

لدينا f تزايدية قطعا على IR يعني أن $\forall x \in IR \quad f'(x) > 0$

علما أن $\forall x \in IR \quad f'(x) \neq 0$

نفترض أن $\exists \beta \in IR \quad f'(\beta) \leq 0$

لدينا $f'(\alpha) > 0$ و $f'(\beta) < 0$

بما أن f متصلة على IR فإنها متصلة على $[\alpha, \beta]$ أو على $[\beta, \alpha]$ (حسب الحالتين $\alpha < \beta$ أو $\alpha > \beta$)

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا

$$\exists \gamma \in]\alpha, \beta[\quad f'(\gamma) = 0$$

وهذا يخالف معطى التمرين

إذن $\forall x \in IR \quad f'(x) > 0$

وهذا يعني أن f تزايدية قطعا على IR

* * * *

18

-1 بين أنه مهما يكن x و y من IR فإن

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

-2 بين أنه مهما يكن x و y من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن

$|x - y| \leq |\tan x - \tan y|$

-1 اثبات النتيجة الأولى

ليكن x و y عنصرين من IR بحيث $x < y$

الدالة sin قابلة للاشتقاق على $]x, y[$ ومتصلة على $[x, y]$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية يكون لدينا

$$\exists \alpha \in]x, y[\quad \sin x - \sin y = (x - y) \sin'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]x, y[\quad \sin x - \sin y = (x - y) \cos \alpha$

ومنه $|\sin x - \sin y| = |x - y| \, |\cos \alpha|$

وبما أن $|\cos \alpha| \leq 1$ فإن $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

اثبات النتيجة الثانية

ليكن x و y عنصرين من IR بحيث $x < y$

الدالة cos قابلة للاشتقاق على $]x, y[$ ومتصلة على $[x, y]$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية يكون لدينا

$$\exists \alpha \in]x, y[\quad \cos x - \cos y = (x - y) \cos'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]x, y[\quad \cos x - \cos y = -(x - y) \sin \alpha$

ومنه $|\cos x - \cos y| = |x - y| \, |\sin \alpha|$

وبما أن $|\sin \alpha| \leq 1$ فإن $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

-2 اثبات النتيجة الثالثة

ليكن x و y عنصرين $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $x < y$

الدالة tan قابلة للاشتقاق على $]x, y[$ ومتصلة على $[x, y]$ ومنه

$$\exists \alpha \in]x, y[\quad \tan x - \tan y = (x - y) \tan'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]x, y[\quad \tan x - \tan y = (x - y)(1 + \tan^2 \alpha)$

ومنه $|\tan x - \tan y| = |x - y| (1 + \tan^2 \alpha)$

وبما أن $1 \leq 1 + \tan^2 \alpha$ فإن $|x - y| (1 + \tan^2 \alpha) \geq |x - y|$

ومنه $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$

* * * *

19

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على $[a, b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a, b[$ بحيث $\forall x \in]a, b[\quad g'(x) \neq 0$

-1 بين أن الدالة g تباينية

-2 بين أن $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\exists c \in]a,b[)$

-1 الدالة g تباينية

ليكن x و y عنصرين مختلفين من $[a, b]$ (نفترض أن $x < y$)

لدينا g متصلة على $[x, y]$ لأن $[x, y] \subset [a, b]$ و g متصلة على $[a, b]$

g قابلة للاشتقاق على $]x, y[$ لأن g قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ وأن $]x, y[\subset]a, b[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists \alpha \in]x, y[\quad g(x) - g(y) = (x - y) \ '(\alpha)$$

وبما أن $\forall x \in]a, b[\quad g'(x) \neq 0$ فإن $g'(\alpha) \neq 0$

ومنه $g(x) - g(y) \neq 0$ أي $g(x) \neq g(y)$

إذن g تباينية.

-2 وجود العدد c

نضع $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

ونعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a, b] \quad h(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

الدالة h متصلة على $[a, b]$ لأن f و g متصلين على $[a, b]$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]a, b[$

لدينا
$$\begin{aligned} h(a) - h(b) &= f(a) - f(b) - \lambda (g(a) - g(b)) \\ &= f(a) - f(b) + f(b) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه $h(a) = h(b)$

وحسب مبرهنة رول لدينا

$$\exists c \in]a, b[\quad h'(c) = 0$$

أي $\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = \lambda g'(c)$

وبما أن $g'(c) \neq 0$ فإن $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda$

إذن $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\exists c \in]a,b[)$

* * * *

20

ليكن α و β عددين جذريين موجبين قطعا بحيث $\alpha + \beta = 1$. ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا بحيث $a < b$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR^+ \quad f(x) = (x+a)^\alpha (x+b)^\beta - a^\alpha b^\beta$$

1- لتكن g الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR^+ \quad g(x) = \frac{b-a}{x+a}$$

أ- بين أنه مهما يكن x من IR^+ فإن

$$f'(x) = \frac{1+\alpha g(x)}{(1+g(x))^\alpha}$$

ب- بين أنه مهما يكن x من IR^+_* فإن

$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$$

ج- استنتج أن $\forall x \in IR^+ \quad f'(x) > 1$

2- استنتج أنه مهما يكن x من IR^+ فإن

$$x + a^\alpha b^\beta \le (x+a)^\alpha (x+b)^\beta$$

1-أ- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من IR^+ . لدينا

$$f'(x) = \alpha (x+a)^{\alpha-1} (x+b)^\beta + \beta (x+b)^{\beta-1} (x+a)^\alpha$$

$$= (x+a)^{\alpha-1} (x+b)^{\beta-1} [\alpha (x+b) + \beta (x+a)]$$

$$= (x+a)^{\alpha-1} (x+b)^{\beta-1} ((\alpha+\beta)x + \alpha b + \beta a)$$

لدينا $\alpha + \beta = 1$ ومنه $\beta - 1 = -\alpha$ إذن

$$f'(x) = (x+a)^{\alpha-1} (x+b)^{-\alpha} (x + \alpha b + (1-\alpha) a)$$

$$= \frac{(x+a)^{\alpha-1}}{(x+b)^\alpha} (x + a + \alpha (b-a))$$

$$= \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^\alpha \left(1 + \alpha . \frac{b-a}{x+a}\right)$$

لدينا

$$\frac{x+b}{x+a} = 1 + \frac{b-a}{x+a} = 1 + g(x)$$

إذن

$$f'(x) = (1+g(x))^{-\alpha} (1 + \alpha g(x)) = \frac{1+\alpha g(x)}{(1+g(x))^\alpha}$$

وبالتالي فإن

$$\forall x \in IR^+ \quad f'(x) = \frac{1+\alpha g(x)}{(1+g(x))^\alpha}$$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بمايلي :

$$(\forall x \in IR^+) \quad h(x) = (1+x)^\alpha$$

ليكن x عنصرا من IR^+_*

الدالة h متصلة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$

وحسب مبرهنة التزيدات المنتهية لدينا

$$\exists c \in]0, x[\quad h(x) - h(0) = x h'(c)$$

لدينا $h'(c) = \alpha (1+c)^{\alpha-1}$ وبما أن $c > 0$ فإن $1 + c > 1$

وبما أن $-1 < \alpha - 1 < 0$ فإن $(1+c)^{\alpha-1} < 1$ ومنه $h'(c) < \alpha$

إذن $h(x) - h(0) < \alpha x$ أي $h(x) < \alpha x + 1$

بمعنى أن $(1+x)^\alpha < \alpha x + 1$

ج- الاستنتاج الأول

ليكن x عنصرا من IR^+ . لدينا $g(x) > 0$

وحسب السؤال السابق لدينا

$$(1+g(x))^\alpha < \alpha g(x) + 1$$

أي $1 < \frac{\alpha g(x) + 1}{(1+g(x))^\alpha}$ أي $1 < f'(x)$

2- الاستنتاج الثاني

ليكن x عنصرا من IR^+_*

الدالة f متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists c \in]0, x[\quad f(x) - f(0) = x f'(c)$$

لدينا حسب السؤال الثاني الجزء ج منه : $f'(c) > 1$

ومنه $f(x) - f(0) > x$

أي $f(x) > x$ علما أن $f(0) = 0$

إذن $(x+a)^\alpha (x+b)^\beta > x + a^\alpha b^\beta$

إذا كان $x = 0$ فإن $(x+a)^\alpha (x+b)^\beta = x + a^\alpha b^\beta$

وبالتالي فإنه مهما يكن x من IR^+ فإن

$$(x+a)^\alpha (x+b)^\beta \ge x + a^\alpha b^\beta$$

* * * *

21

ليكن α و β عددين جذريين غير منعدمين. نعتبر f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$ بحيث

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0, 1[\quad f(x) > 0 \end{cases}$$

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بمايلي

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = (f(x))^\alpha (f(1-x))^\beta$$

بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$

2- استنتج $\exists c \in]0, 1[\quad \alpha . \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta . \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

1- قابلية الاشتقاق للدالة g

* لدينا f قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$

ولدينا $\forall x \in]0, 1[\quad f(x) > 0$

ومنه الدالة $x \longmapsto (f(x))^\alpha$ قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$

* لدينا f قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$

ولدينا الدالة $x \longmapsto 1-x$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

ولدينا $\forall x \in]0,1[\quad 1-x \in]0,1[$

ومنه الدالة $x \longmapsto f(1-x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

وبما أن $(\forall x \in]0,1[) \quad f(1-x)>0$ فإن الدالة $x \longmapsto (f(1-x))^{\beta}$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

* إذن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

2- الاستنتاج

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

ومنه g متصلة على $]0,1[$

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (f(x))^{\alpha} = (f(0))^{\alpha}$$

لأن الدالة f متصلة على اليمين في 0 لأنها قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

لدينا
$$\lim_{x \to 0} (f(1-x))^{\beta} = (f(1))^{\beta}$$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = (f(0))^{\alpha}\,(f(1))^{\beta} = g(0)$$

ومنه g متصلة على اليمين في 0

وبالمثل بين أن g متصلة على اليسار في 1

إذن g متصلة على $[0,1]$

ولدينا
$$g(0) = (f(0))^{\alpha}\,(f(1))^{\beta} = 0$$
$$g(1) = (f(1))^{\alpha}\,(f(0))^{\beta} = 0$$

ومنه $g(0) = g(1)$

وحسب مبرهنة رول لدينا

$$\exists c \in]0,1[\qquad g'(c) = 0$$

ليكن x عنصرا من $]0,1[$

لدينا
$$g'(x) = \alpha\,(f(x))^{\alpha-1}\, f'(x)\,(f(1-x))^{\beta} + \beta\,(f(1-x))^{\beta-1}\,(-f'(1-x))\,(f(x))^{\alpha}$$
$$= (f(x))^{\alpha-1}\,(f(1-x))^{\beta-1}\,[\alpha f'(x) f(1-x) - \beta f(x) f'(1-x)]$$

وبما أن $(\forall x \in]0,1[) \quad f(x)>0$ فإن

$$\forall x \in]0,1[\quad (f(x))^{\alpha-1}\,(f(1-x))^{\beta-1} \neq 0$$

ومنه
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha f'(x) f(1-x) - \beta f(x) f'(1-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha f'(x) f(1-x) = \beta f(x) f'(1-x)$$
$$\Leftrightarrow \alpha . \frac{f'(x)}{f(x)} = \beta . \frac{f'(1-x)}{f(1-x)}$$

إذن
$$\exists c \in]0,1[\qquad \alpha . \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta . \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

* * * * *

22

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = x^3 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right)$$

1- أ- بين أن IR هي مجموعة تعريف الدالة f

ب- ادرس اشتقاق f في 0

2- أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن

$$\forall x \in]0,1[\qquad x < \operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من IR فإن

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \leq f(x) \leq x$$

3- أ- بين أنه مهما يكن x من IR فإن

$$x f'(x) = 3 f(x) - \frac{2x^5}{1+x^4}$$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من IR فإن

$$\frac{x^2}{1+x^4}\left(3\sqrt{1+x^4} - 2x^2\right) \leq f'(x)$$

ج- حدد جدول تغيرات الدالة f .

1-أ- مجموعة تعريف الدالة f

لدينا $\forall x \in IR \qquad 1 \leq 1+x^4$

ومنه
$$\forall x \in IR \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1$$

إذن
$$\forall x \in IR \qquad 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1$$

ومنه IR هي مجموعة تعريف الدالة f

ب- قابلية اشتقاق f في 0

ليكن x عنصرا من IR^* . لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(x^3 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right)\right)$$
$$= x^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right)$$

ولدينا

ومنه
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1$$

إذن
$$\lim_{x \to 0} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه f قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا $f'(0)=0$

2-أ- ثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]0,1[$

لدينا Arcsin قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ ومتصلة على $[0,x]$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$(\exists \alpha \in]0,x[) \quad \operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcsin} 0 = x . \operatorname{Arcsin}'(\alpha)$$

أي $\exists\, \alpha \in]0, x[\quad \text{Arcsin}\, x = \dfrac{x}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

لدينا $0 < \alpha < x$ ومنه $1 - x^2 < 1 - \alpha^2 < 1$

إذن $1 < \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ومنه $x < \text{Arc sin}\, x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

وبالتالي فإن $\forall x \in]0, 1[\quad x < \text{Arcsin} x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR^* . لدينا

$$f(x) = x^3 \text{ Arcsin } u(x)$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

لدينا $0 < u(x) < 1$ وحسب السؤال السابق لدينا

$$u(x) < \text{Arc sin}\, u(x) < \frac{u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

لدينا $1 - u^2(x) = 1 - \dfrac{1}{x^4+1}$

$$= \frac{x^4}{x^4+1}$$

ومنه $\dfrac{u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$

إذن $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} < \text{Arc sin}\, u(x) < \dfrac{1}{x^2}$

ومنه $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} < f(x) < x$

ولدينا $f(0) = 0$

ومنه $\forall x \in IR \quad \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \le f(x) \le x$

3- أ- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من IR^* . لدينا

$$f(x) = x^3 \text{ Arcsin } u(x)$$

ومنه $f'(x) = 3\,x^2 \text{ Arc sin}\, u(x) + x^3 \cdot u'(x) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

لدينا $u(x) = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ ومنه $u'(x) = -\dfrac{1}{2}(4x^3)(1+x^4)^{-\frac{3}{2}}$

$$= \frac{-2x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$$

ولدينا $\sqrt{1-u^2(x)} = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$

إذن $f'(x) = 3x^2 \text{ Arc sin}\, u(x) + x^3 \cdot \dfrac{-2x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$

$$= 3x^2 \frac{f(x)}{x^3} - \frac{2x^4}{1+x^4}$$

ومنه $x f'(x) = 3 f(x) - \dfrac{2x^5}{1+x^4}$

وبما أن $0 \cdot f'(0) = 3 f(0) - \dfrac{2\, 0^5}{1+0^4}$ فإن

$$(\forall x \in IR) \; x f'(x) = 3 f(x) - \frac{2x^5}{1+x^4}$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR^* . لدينا

$$f'(x) = 3\frac{f(x)}{x} - \frac{2x^4}{1+x^4}$$

وحسب السؤال الثاني الجزء ب منه لدينا

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \le f(x)$$

ومنه $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^4}} \le \dfrac{3 f(x)}{x}$

إذن $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^4}} - \dfrac{2x^4}{1+x^4} \le f'(x)$

أي $\dfrac{x^2}{1+x^4}(3\sqrt{1+x^4} - 2x^2) \le f'(x)$

ولدينا $f'(0) = 0$ ومنه

$$(\forall x \in IR) \quad \frac{x^2}{1+x^4}(3\sqrt{1+x^4} - 2x^2) \le f'(x)$$

ج- جدول تغيرات الدالة f

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$\frac{x^2}{1+x^4}(3\sqrt{1+x^4} - 2x^2) \le f'(x)$$

ولدينا $3\sqrt{1+x^4} - 2x^2 = \dfrac{9(1+x^4) - 4x^4}{3\sqrt{1+x^4} + 2x^2}$

$$= \frac{9 + 5x^2}{3\sqrt{1+x^4} + 2x^2}$$

ومنه $\forall x \in IR^* \quad \dfrac{x^2}{1+x^4}(3\sqrt{1+x^4} - 2x^2) > 0$

إذن $\forall x \in IR^* \quad f'(x) > 0$

لدينا $\forall x \in IR_+ \quad \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \leq f(x)$

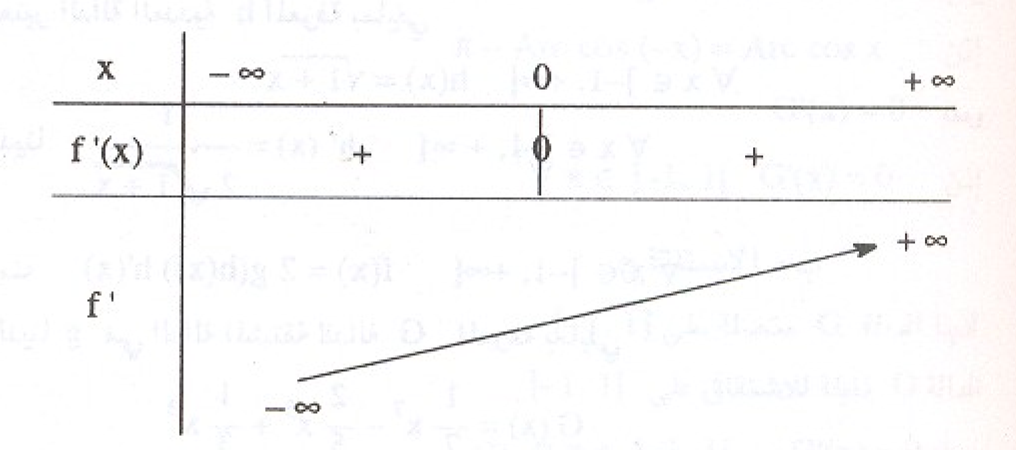
ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^6}{x^4+1}}$

$= +\infty$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $(\forall x \in IR_-) \quad f(x) \leq x$

ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



* * * *

23

لتكن الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = x\sqrt{x-1}$$

ونعتبر الدالة العددية g المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR \quad g(x) = x^3 + x$$

1- بين ان $\quad \forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = g(\sqrt{x-1})$

2- استنتج الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 2 .

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $[1, +\infty[$

لدينا $g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^3 + \sqrt{1-x}$

$= \sqrt{x-1}\,((\sqrt{x-1})^2 + 1)$

$= x\sqrt{x-1}$

$= f(x)$

إذن $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = g(\sqrt{x-1})$

2- الاستنتاج

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بمايلي

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad h(x) = \sqrt{x-1}$$

لدينا $\forall x \in]1, +\infty[\quad h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

أي $\forall x \in]1, +\infty[\quad 2\,h'(x)\,h(x) = 1$

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

لدينا $f(x) = g(\sqrt{1-x})$

$= 2\,h(x)\,g(\sqrt{1-x})\,h'(x)$

ولدينا $h(x)\,g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{x-1})^4 + (\sqrt{x-1})^2$

$= t'(\sqrt{x-1})$

حيث t هي الدالة المعرفة بما يلي

$$t(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$$

إذن $f(x) = 2\,t'(\sqrt{x-1})\,h'(x)$

$= 2\,(t \circ h)'(x)$

ومنه $f = 2\,(t \circ h)'$

وبالتالي فإن $2\,t \circ h$ هي دالة أصلية للدالة f .

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 2

لدينا $\forall x \in [1, +\infty[\quad F(x) = 2\,t \circ h(x) + \alpha$

$F(2) = 0$

ولدينا $t \circ h(2) = t(h(2))$

$= t(1)$

$= \dfrac{8}{15}$

ومنه $\alpha = -\dfrac{16}{15}$

إذن الدالة F معرفة بمايلي

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad F(x) = 2\left[\frac{1}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{1}{3}(\sqrt{x-1})^3\right] - \frac{16}{15}$$

* * * *

24

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

أ- بين أن $\quad \forall x \in IR_+^* \quad -1 < g(x) < 1$

ب- بين أن $\quad \forall x \in IR_+^* \quad f(x) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$

2- استنتج الدوال الأصلية للدالة f

1- اثبات النتيجة الأولى

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا

$$-1 < g(x) < 1 \Leftrightarrow |g(x)| < 1$$
$$\Leftrightarrow |x-1| < |x+1|$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < x$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن

$$\forall x \in IR_+^* \quad -1 < g(x) < 1$$

ب- اثبات النتيجة الثانية

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا
$$1-g^2(x) = 1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$
$$= \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{4x}{(x+1)^2}$$

ومنه
$$\sqrt{1-g^2(x)} = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

ولدينا
$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

إذن
$$\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$
$$= f(x)$$

وبالتالي فإن
$$(\forall x \in IR_+^*)\ f(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$$

2- الاستنتاج

لدينا
$$\forall x \in IR_+^* \quad f(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$$

أي
$$\forall x \in IR_+^* \quad f(x) = g'(x)\,\text{Arc sin}'(g(x))$$

بمعنى أن $f = (\text{Arcsin} \circ g)'$

إذن الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال التالية

$$(\alpha \in IR) \quad \text{Arcsin} \circ g + \alpha$$

وهي معرفة كالتالي

$$(\alpha \in IR) \quad x \longmapsto \text{Arcsin}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \alpha$$

* * * *

25

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي
$$\forall x \in [-1, +\infty[\quad f(x) = x^2\sqrt{x+1}$$

1- حدد دالة حدودية g بحيث
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = \frac{g(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}}$$

2- استنتج الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0

1- تحديد الدالة الحدودية

ليكن x عنصرا من $]-1, +\infty[$ لدينا

$$f(x) = \frac{g(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow g(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+x}\, f(x)$$
$$\Leftrightarrow g(\sqrt{1+x}) = x^2(x+1)$$

نضع $X = \sqrt{1+x}$ ومنه $x = X^2 - 1$

إذن
$$g(X) = (X^2-1)^2(X^2-1+1)$$
$$= X^2(X^2-1)^2$$
$$= X^6 - 2X^4 + X^2$$

ومنه الدالة الحدودية g معرفة كمايلي
$$g(x) = x^6 - 2x^4 + x^2$$

2- الاستنتاج

لدينا
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = \frac{g(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}}$$

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بمايلي
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad h(x) = \sqrt{1+x}$$

لدينا
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

ومنه
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = 2\,g(h(x))\,h'(x)$$

ولدينا g هي الدالة المشتقة للدالة G المعرفة بمايلي
$$G(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$$

إذن
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = 2\,G'(h(x)) \times h'(x)$$

أي
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = 2\,(G \circ h)'(x)$$

ومنه $2\,G \circ h$ هي دالة أصلية للدالة f

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0

لدينا
$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad F(x) = 2\,G(h(x)) + \alpha$$

وبما أن $h(0) = 1$ فإن $G(h(0)) = \frac{8}{105}$

ومنه $\alpha = -\frac{16}{105}$ علما أن $F(0) = 0$

إذن F معرفة كمايلي

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad F(x) = \frac{2}{7}(\sqrt{1-x})^7 - \frac{4}{5}(\sqrt{1+x})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - \frac{16}{105}$$

* * * *

26

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي
$$\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) = \text{Arc cos}\, x$$

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f بحيث $F(1) = 0$

1- نعتبر الدالة العددية G المعرفة بما يلي
$$\forall x \in [-1, 1] \quad G(x) = F(-x) - F(x) + \pi x$$

أ- حدد الدالة المشتقة للدالة G

ب- استنتج أن $F(-x) - F(x) = -\pi x \quad \forall x \in [-1, 1]$

2- بين أن $-\pi \leq F(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$

3- نعتبر الدالة العددية H المعرفة بما يلي :
$$\forall x \in [-1, 1] \quad H(x) = F(x) - x\,f(x)$$

أ- حدد الدالة المشتقة للدالة H.

ب- استنتج أن
$$\forall x \in [-1,1] \quad F(x) = x\,f(x) - \sqrt{1-x^2}$$

1- أ- الدالة المشتقة للدالة G.

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]-1 , 1[$

ليكن x عنصرا من $]-1 , 1[$

لدينا $G'(x) = -F'(-x) - F(x) + \pi$

$= -f(-x) - f(x) + \pi$

$= (\pi - f(-x)) - f(x)$

$= [\pi - \text{Arccoss}(-x)] - \text{Arccos } x$

لدينا $\cos(\pi - \text{Arcos}(-x)) = -\cos(\text{Arcos}(-x))$

$= -(-x)$

$= x$

$= \cos(\text{Arc cos } x)$

ولدينا $0 \le \text{Arcos } x \le \pi$ و $0 \le \pi - \text{Arc cos}(-x) \le \pi$

إذن $\pi - \text{Arc cos}(-x) = \text{Arc cos } x$

ومنه $G'(x) = 0$

إذن $\forall x \in]-1, 1[\quad G'(x) = 0$

ب- الاستنتاج

لدينا الدالة G متصلة على $[-1, 1]$

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$

وبما $\forall x \in]-1, 1[\quad G'(x) = 0$ فإن $\forall x \in [-1, 1] \quad G(x) = G(0)$

وبما أن $G(0) = 0$ فإن

$$\forall x \in [-1, 1] \quad F(-x) - F(x) = -\pi x$$

2- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا $\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) > 0$

أي $\forall x \in [-1, 1] \quad F'(x) > 0$

إذن F تزايدية قطعا على $[-1, 1]$ ومنه

$$\forall x \in [-1, 1] \quad F(-1) \le F(x) \le F(1)$$

حسب السؤال الأول الجزء ب منه لدينا

$F(-1) - F(1) = -\pi$ أي $F(-1) = -\pi$ علما أن $F(1) = 0$

إذن $\forall x \in [-1, 1] \quad -\pi \le F(x) \le 0$

3- أ- الدالة المشتقة للدالة H

الدالة H قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$. لدينا

$H'(x) = F'(x) - x f'(x) - f(x)$

$= f(x) - x f'(x) - f(x)$

$= -x f'(x)$

$= -x \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

إذن $H'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$

ب- الاستنتاج

لدينا $H'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$

أي $\forall x \in]-1, 1[\quad H'(x) = -\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

إذن 'H هي الدالة المشتقة للدالة $x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$

ومنه $\forall x \in [-1, 1] \quad H(x) = -\sqrt{1-x^2} + \alpha$

لدينا $H(1) = F(1) - f(1)$ أي $H(1) = 0$

ومنه $\alpha = 0$ إذن

$$\forall x \in [-1, 1] \quad H(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

وبالتالي فإن مهما يكن x من $[-1, 1]$ فإن

$$F(x) = x f(x) - \sqrt{1-x^2}$$

* * * *

27

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

ولتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0 .

1- أ- بين أن الدالة f تناقصية قطعا على $[0, 1]$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $]0, 1]$

$$x\sqrt{1-x^2} < F(x) < x$$

2- نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad h(x) = \sin x$$

أ- بين أن $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (F \circ h)'(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $[0, 1]$

$$F(h(x)) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

3- حدد الدالة F

1- أ- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$ لدينا

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

بما أن $x > 0$ فإن $f'(x) < 0$

إذن f تناقصية قطعا على $[0, 1]$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]0, 1]$

لدينا F متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا :

$$\exists \alpha \in]0, x[\quad F(x) - F(0) = x F'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]0, x[\quad F(x) = x f(a)$

لدينا $0<\alpha<x$ و f تناقصية قطعا على $[0, 1]$

ومنه $f(x)<f(\alpha)<f(0)$

أي $x\, f(x) < x\, f(\alpha) < x\, f(0)$

ومنه $x\sqrt{1-x^2} < F(x) < x$

2- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا

$$\begin{aligned}(F\circ h)'(x) &= F'(h(x))\, h'(x)\\ &= f(h(x))\, h'(x)\\ &= \sqrt{1-\sin^2 x}\,.\cos x\\ &= |\cos x|\,.\cos x\end{aligned}$$

وبما أن $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos x\ge 0$ ومنه

$$(F\circ h)'(x)=\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

ب- الاستنتاج

نعتبر الدالة G المعرفة بمايلي

$$\forall x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad G(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

لدينا $\forall x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad G'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

ومنه $G'=(F\circ h)'$

إذن $(\alpha\in IR)\quad F\circ h = G+\alpha$

وبما أن $G(0)=0$ و $F\circ h(0)=0$ فإن $\alpha=0$

ومنه $F\circ h = G$

إذن $\forall x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad F(h(x))=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

3- تحديد الدالة الأصلية F

* ليكن x عنصرا من $[0, 1]$

لدينا $F(h(x))=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

بما أن $0\le x\le 1$ فإن $\exists!\,\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x=\sin\alpha$

ومنه $\exists!\,\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x=\sin\alpha$

$$\begin{aligned}F(x)&=F(h(\alpha))\\ &=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\end{aligned}$$

أي $F(x)=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$

لدينا $x=\sin\alpha$ أي $\alpha=\text{Arcsin}\, x$ علما أن $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

و $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

إذن $F(x)=\frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

* ليكن x عنصرا من $[-1, 0]$

لدينا $0<-x<1$ ومنه

$$\begin{aligned}F(-x)&=\frac{1}{2}\text{Arc}\sin(-x)+\frac{1}{2}(-x)\sqrt{1-x^2}\\ &=-\frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

نعتبر الدالة العددية H المعرفة بما يلي

$$\forall x\in[-1, 1] \quad H(x)=F(-x)$$

لدينا $\forall x\in[-1, 1] \quad H'(x)=-F'(-x)$

أي $\forall x\in[-1, 1] \quad H'(x)=-f(x)$

أي $\forall x\in[-1, 1] \quad H'(x)+F'(x)=0$

ومنه $\forall x\in[-1, 1] \quad H(x)+F(x)=\alpha$

وبما أن $F(0)=0$ فإن $H(0)=0$ ومنه $\alpha=0$

إذن $(\forall x\in[-1, 1]) \quad H(x)=-F(x)$

ومنه $(\forall x\in[-1, 1]) \quad F(-x)=-F(x)$

وبالتالي فإنه إذا كان x عنصرا من $[-1, 0]$ فإن

$$F(x)=\frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

* الدالة F معرفة إذن بمايلي

$$\forall x\in[-1, 1] \quad F(x)=\frac{1}{2}\text{Arc}\sin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

* * * *

28

لتكن الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}$$

ولتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0 .

1- نعتبر الدالة العددية G المعرفة بما يلي :

$$\forall x\in IR \quad G(x)=F(x)-\frac{1}{2}x^2$$

أ- بين أن G تزايدية قطعا على IR

ب- استنتج أن $\frac{1}{2}x^2\le F(x) \quad \forall x\in IR^+$

ج- حدد النهايتين التاليتين

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$$

2- أ- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على IR^+

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $]1, +\infty[$

$$F(x)<\sqrt{2}\, x^2$$

1- أ- رتابة الدالة G

الدالة G قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$\begin{aligned}G'(x)&=F'(x)-x\\ &=f(x)-x\end{aligned}$$

لأن F هي دالة أصلية للدالة f

ومنه

$$G'(x)=\sqrt{1+x^2}-x$$

لدينا $|x| < \sqrt{x^2+1}$ و $x \le |x|$ ومنه $x < \sqrt{1+x^2}$

إذن $G'(x) > 0$

وبالتالي فإن G تزايدية قطعا على IR

ب- الاستنتاج

لدينا G تزايدية قطعا على IR ومنه

$$\forall x \in IR^+ \quad G(0) \le G(x)$$

ولدينا $G(0) = F(0)$ أي $G(0) = 0$

ومنه $\frac{1}{2}x^2 \le F(x) \quad \forall x \in IR^+$

ج- حساب النهايتين

* لدينا $\frac{1}{2}x^2 \le F(x) \quad \forall x \in IR^+$

وبما أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

* لدينا $\frac{1}{2}x^2 \le F(x) \quad \forall x \in IR^+$

ومنه $\frac{1}{2}x \le \frac{F(x)}{x} \quad \forall x \in IR_+^*$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$

2- أ- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ومنه $f'(x) > 0$ لأن $x > 0$

إذن f تزايدية قطعا على +IR

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $[1, +\infty[$

الدالة F متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists \alpha \in]0, x[\quad F(x) - F(0) = x F'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]0, x[\quad F(x) = x f(\alpha)$

لدينا $\alpha < x$ والدالة f تزايدية قطعا على +IR ومنه

$$f(\alpha) < f(x)$$

إذن $F(x) < x f(x)$

ولدينا $1 \le x$ ومنه $1 + x^2 \le 2x^2$ أي $\sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}\, x$

ومنه $F(x) < x^2 \sqrt{2}$

إذن $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(x) < \sqrt{2}.\, x^2$

* * * *

29

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f بحيث $F(0) = 0$

1- نعتبر الدالة العددية G المعرفة بما يلي

$$G(x) = F(x) - \frac{1}{2}x^2 + x$$

أ- ادرس رتابة الدالة G

ب- استنتج أن $\frac{1}{2}x^2 - x \le F(x) \quad \forall x \in IR^+$

ج- استنتج النهايتين التاليتين

$\lim_{x \to +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$

3- أ- بين أن $F(x) < x \quad \forall x \in IR_+^-$

ب- استنتج النهاية $\lim_{x \to -\infty} F(x)$

1- أ- رتابة الدالة G

الدالة G قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$G'(x) = F'(x) - x + 1$$
$$= f(x) - (x - 1)$$
$$= \sqrt{x^2 - x + 1} - (x - 1)$$

إذا كان $x - 1 < 0$ فإن $G'(x) > 0$

إذا كان $x - 1 \ge 0$ فإن

$$G'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} - (x - 1) > 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} > (x - 1)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 > x^2 - 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

وبما أن $x > 1$ فإن $G'(x) > 0$

إذن G تزايدية قطعا على IR

ب- الاستنتاج الأول

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا G تزايدية قطعا على IR

ومنه $G(0) \le G(x)$

وبما أن $G(0) = 0$ لأن $F(0) = 0$ فإن

$$0 \le F(x) - \frac{1}{2}x^2 + x$$

أي $\frac{1}{2}x^2 - x \le F(x)$

إذن $\frac{1}{2}x^2 - x \le F(x) \quad \forall x \in IR^+$

ج- الاستنتاج الثاني

* لدينا $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) = +\infty$

ولدينا $\frac{1}{2}x^2 - x \le F(x) \quad (\forall x \in IR^+)$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

* لدينا $\forall x \in IR^+ \quad \frac{1}{2}x^2 - x \le F(x)$

ومنه $\forall x \in IR_*^+ \quad \frac{1}{2}x - 1 \le \frac{F(x)}{x}$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

3- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_*^-

لدينا F متصلة على $[x, 0]$ وقابلة للاشتقاق على $]x, 0[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists \alpha \in]x, 0[\quad F(x) - F(0) = x F'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]x, 0[\quad F(x) = x f(\alpha)$

لدينا $\alpha < 0$ ومنه $1 < \alpha^2 - \alpha + 1$ أي $1 < f(\alpha)$

وبما أن $x < 0$ فإن $x f(\alpha) < x$ ومنه $F(x) < x$

إذن $\forall x \in IR_*^- \quad F(x) < x$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in IR_*^- \quad F(x) < x$

وبما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$

4 دراسة وتمثيل دوال عددية

– دراسة الدوال اللاجذرية

– دراسة دوال من النوع

$x \longmapsto \text{Arcsin } u(x)$

$x \longmapsto \text{Arccos } u(x)$

$x \longmapsto \text{Arctan } u(x)$

1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$$

وليكن (C) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد المنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن f فردية

ج- احسب نهاية f عند $+\infty$

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = x - \sqrt{x^2-x+1}$$

أ- بين أن مهما يكن x من IR^+ فإن $g(x) < \frac{1}{2}$

ب- استنتج رتابة الدالة g على IR^+

ج- بين أن $\forall x \in IR^+ \quad f(x) = \sqrt{2g(x^2+1)}$

د- ضع جدول تغيرات الدالة f

3- أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل f

4- أ- حدد معادلة مماس (C) في النقطة O

ب- ارسم (C) ومنحنى f^{-1}

1- تحديد المجموعة D

لدينا $x^2-x+1>0$ و $x^2+x+1>0 \quad (\forall x \in IR)$

ومنه $D = IR$

ب- الدالة f فردية

* ليكن x عنصرا من D

- لدينا $-x \in D$

- لدينا

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+(-x)+1} - \sqrt{(-x)^2-(-x)+1}$$
$$= \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+x+1}$$
$$= -f(x)$$

* إذن الدالة f فردية

ج- نهاية الدالة f عند $+\infty$

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$$
$$= \frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_+ . لدينا

$$g(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-x+1} < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} < \sqrt{x^2-x+1}$$

إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن ا لعبارة الأخيرة صحيحة ومنه $g(x) < \frac{1}{2}$

إذا كان $x \geq \frac{1}{2}$ فإن

$$g(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 < x^2-x+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4} < x^2-x+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < 1$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $g(x) < \frac{1}{2}$

إذن $\forall x \in IR^+ \quad g(x) < \frac{1}{2}$

ب- رتابة الدالة g

ليكن x عنصرا من IR^+ لدينا

$$g'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-x)+1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{1-2g(x)}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

وبما أن $g(x) < \frac{1}{2}$ فإن $g'(x) > 0$

إذن g تزايدية قطعا على IR^+

ج- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR^+ لدينا

$$(f(x))^2 = (x^2+x+1)+(x^2-x+1) - 2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}$$
$$= 2x^2+2-2\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2+1)+1}$$
$$= 2[x^2+1-\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2+1)+1}]$$
$$= 2g(x^2+1)$$

وبما أن $x \geq 0$ فإن $x^2+x+1 > x^2-x+1$

ومنه $f(x) \geq 0$

إذن $f(x) = \sqrt{2g(x^2+1)}$

د- جدول تغيرات الدالة f

الدالة f فردية، لهذا يكفي دراسة رتابتها على IR^+

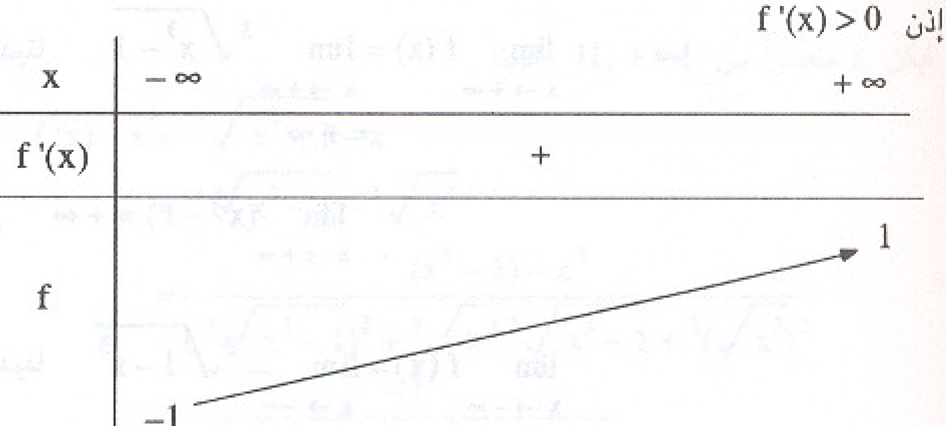
ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا $f(x)=\sqrt{2g(x^2+1)}$

ومنه
$$f'(x)=\frac{2(2x)g'(x^2+1)}{2\sqrt{2g(x^2+1)}}=\frac{2xg'(x^2+1)}{\sqrt{2g(x^2+1)}}$$

لدينا $x^2+1>0$ ومنه $g'(x^2+1)>0$ (أنظر السؤال الثاني الجزء ب منه)

إذن $f'(x)>0$



x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	↗	1

3- أ- التقابل f

لدينا f متصلة على IR

f تزايدية قطعا على IR

إذن f تقابل من IR نحو المجال I حيث

$$I=\left]\lim_{-\infty} f,\lim_{+\infty} f\right[$$
$$=]-1,1[$$

ب- تحديد التقابل العكسي

ليكن x عنصرا من $]-1,1[$ و y عنصرا من IR

نلاحظ أن $\forall x\in IR \quad f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

ومنه $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y^2-y+1} \\ x=\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+y+1}+\sqrt{y^2-y+1}} \end{cases}$$

إذا كان $x=0$ فإن $y=0$

نفترض أن $y\neq 0$ ومنه

$$y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y^2-y+1}=x \\ \sqrt{y^2+y+1}+\sqrt{y^2-y+1}=\dfrac{2y}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+y+1}=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2y}{x}\right) \\ \sqrt{y^2-y+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2y}{x}-x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y+1=\dfrac{1}{4}\left(x+\dfrac{2y}{x}\right)^2 \\ y^2-y+1=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2y}{x}-x\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)y^2=\dfrac{1}{4}x^2-1 \\ \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)y^2=\dfrac{1}{4}x^2-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{4}x^2\cdot\frac{4-x^2}{1-x^2}$$

نلاحظ أن $x\,f(x)\geq 0$ ومنه

$$y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}}$$

وبالتالي فإن

$$\forall x\in IR \quad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}}$$

4- أ- معادلة مماس (C) في O

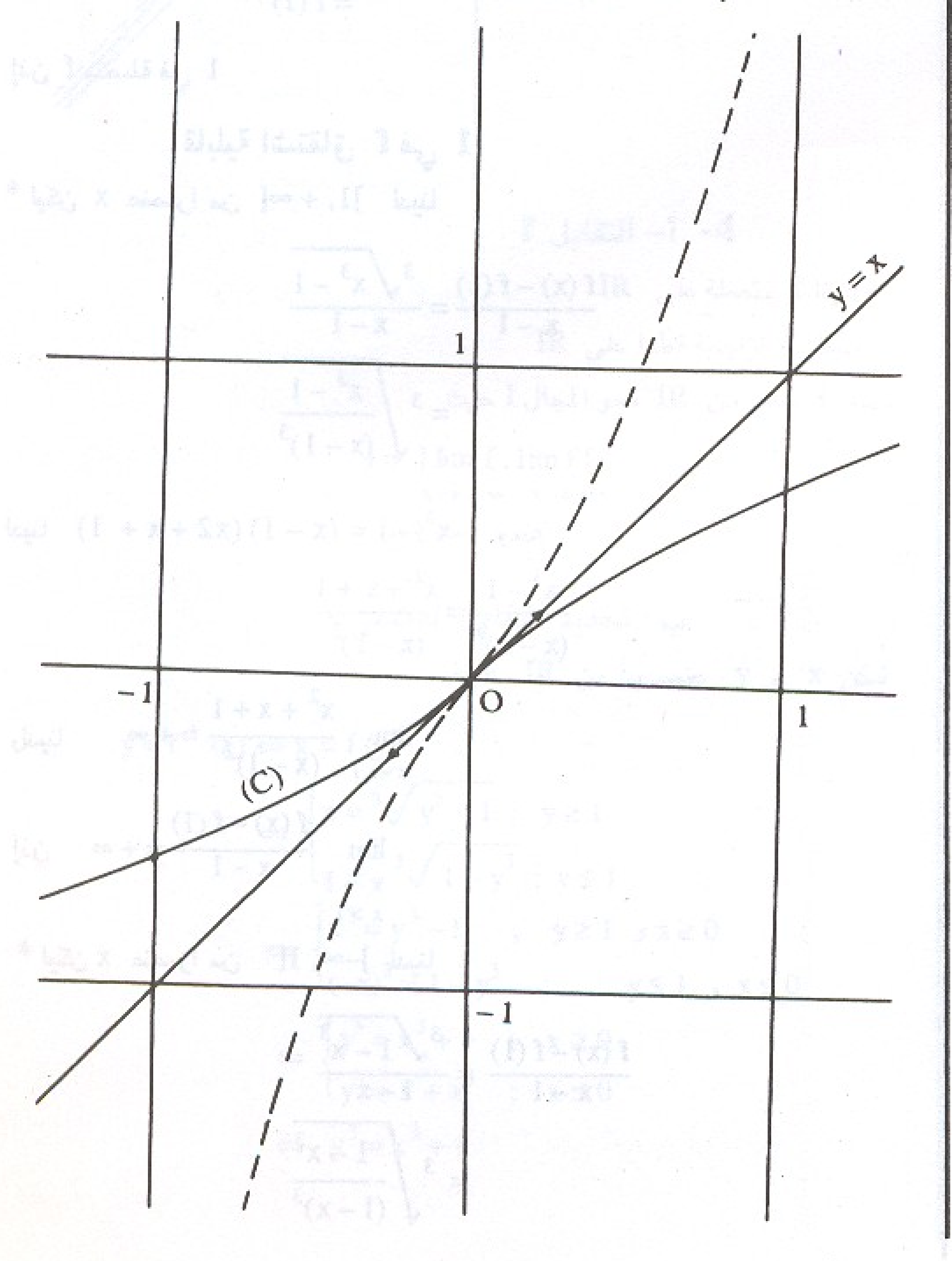
لدينا $f(0)=0$ ولدينا

$$\forall x\in IR \quad f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

ومنه $f'(0)=1$

إذن $y=x$ هي معادلة مماس (C) في O

ب- انشاء المنحنى



2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^3-1} & ; \ x\geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x^3} & ; x\leq 1 \end{cases}$$

1- أ- ادرس اتصال واشتقاق الدالة f في 1

ب- احسب نهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2- ادرس تغيرات الدالة f

3- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

ب- انشئ المنحنى (C)

4- أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل f

ج- انشئ منحنى التقابل العكسي للتقابل f في نفس المعلم

1- أ- اتصال الدالة f في 1

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\sqrt[3]{1-x^3}$

$$=0$$
$$=f(1)$$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt[3]{x^3-1}$

$$=0$$
$$=f(1)$$

إذن f متصلة في 1

قابلية اشتقاق f في 1

* ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x-1}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{(x-1)^3}}$$

لدينا $x^3-1=(x-1)(x2+x+1)$ ومنه

$$\frac{x^3-1}{(x-1)^3}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

* ليكن x عنصرا من $]-\infty,1[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{1-x}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{(1-x)^3}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{(x-1)^3}}$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

* وبالتالي فإن f غير قابلة للاشتقاق في 1

ب- نهايتا الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-1}$

$$=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-1)=+\infty$

* لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt[3]{1-x^3}$

$$=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x^3)=+\infty$

2- تغيرات الدالة f

* ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$ لدينا

$$f(x)=(x^3-1)^{\frac{1}{3}}$$

ومنه $f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2)(x^3-1)^{-\frac{2}{3}}$

$$=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

إذن $\forall x\in\ ]1,+\infty[\quad f'(x)>0$

* ليكن x عنصرا من $]-\infty,-1[$ لدينا

$$f(x)=-(1-x^3)^{\frac{1}{3}}$$

ومنه $f'(x)=-\frac{1}{3}(-3x^2)(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$

$$=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

إذن $\forall x\in\ ]-\infty,-1[\quad f'(x)>0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	||	$+$	
f	$-\infty$	↗		↗		↗	$+\infty$

3-أ- الفرعان اللانهائيان للمنحنى (C)

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ولدينا
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3}}$$
$$= 1$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-1}{x^3} = 1$

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$ لدينا

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3-1} - x$$
$$= \sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt[3]{x^3}$$
$$= \frac{(x^3-1) - x^3}{(\sqrt[3]{x^3-1})^2 + \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^3-1} + (\sqrt[3]{x^3})^2}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2}$$

استعملنا في ذلك المتطابقة الهامة : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2 = +\infty$

ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

إذن تقبل (C) مستقيما مقاربا معادلته $y = x$

* لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{(-x)^3}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3}}$$
$$= 1$$

ليكن x عنصرا من $]-\infty, 0[$ لدينا

$$f(x) - x = -\sqrt[3]{1-x^3} - x$$
$$= -\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(-x)^3}$$
$$= \sqrt[3]{(-x)^3} - \sqrt[3]{1-x^3}$$
$$= \frac{(-x)^3 - (1-x^3)}{(\sqrt[3]{(-x)^3})^2 + \sqrt[3]{(-x)^3}\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$
$$= \frac{-1}{x^2 + \sqrt[3]{-x^3 + x^6} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

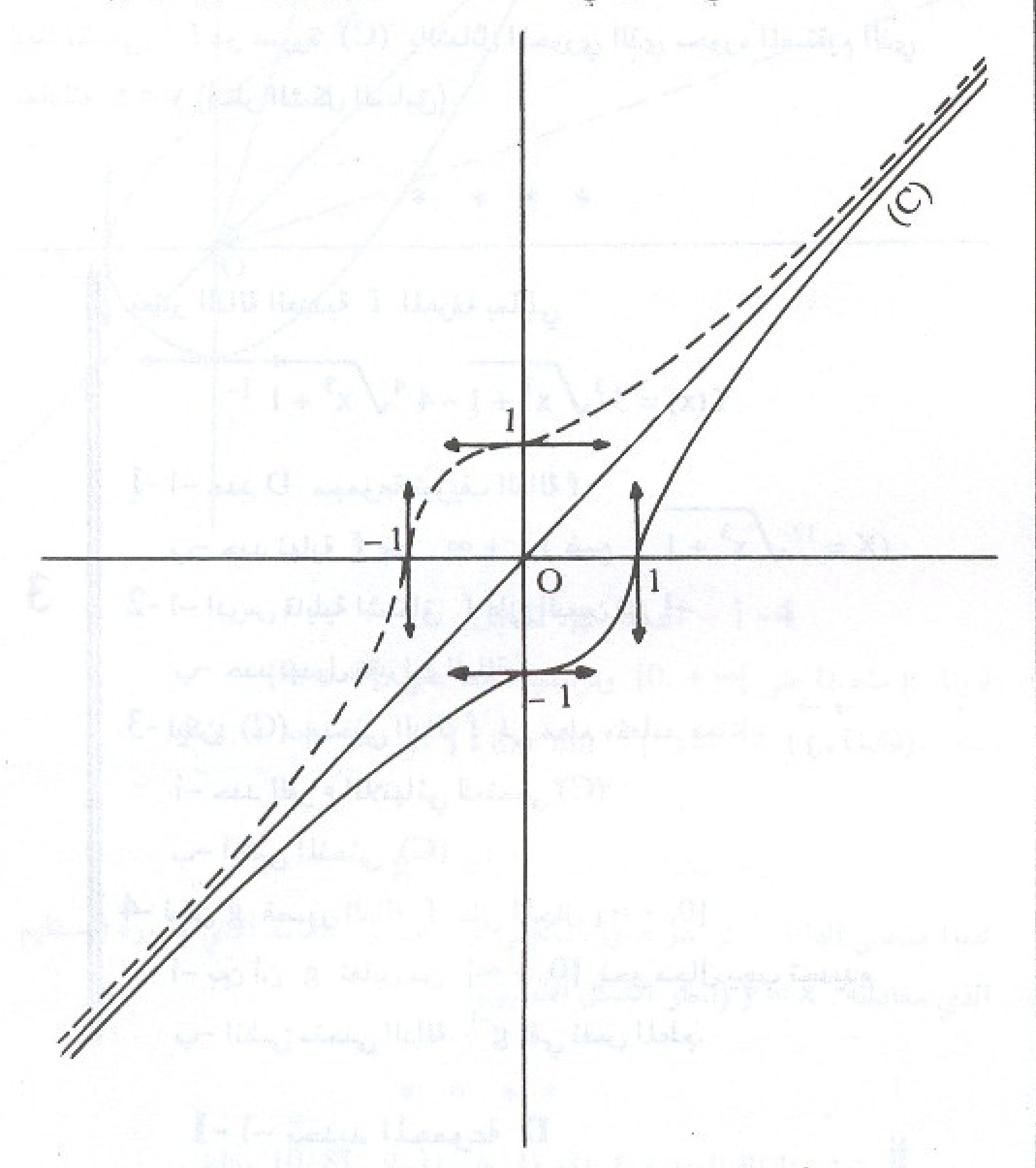
ومنه $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = 0$

إذن تقبل (C) مستقيما مقاربا معادلته $y = x$

ب- انشاء المنحنى (C)

* لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty$$

ومنه تقبل (C) نصفي مماس في النقطة A(1, 0) يوازيان محور الأراتيب.



4- أ- التقابل f

- لدينا f متصلة على IR
- لدينا f تزايدية قطعا على IR

ومنه f تقابل من IR نحو المجال I حيث

$$I =]\lim_{x \to -\infty} f, \lim_{x \to +\infty} f[$$
$$=]-\infty, +\infty[$$

ب- تحديد التقابل العكسي

ليكن x و y عنصرين من IR . لدينا

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y^3-1} \; ; \; y \geq 1 \\ x = -\sqrt[3]{1-y^3} \; ; \; y \leq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 - 1 \; ; \; y \geq 1 \text{ و } x \geq 0 \\ (-x)^3 = 1 - y^3 \; ; \; y \leq 1 \text{ و } x \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = x^3 + 1 \; ; \; x \geq 0 \\ y^3 = 1 + x^3 \; ; \; x \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow y^3 = x^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{x^3+1} & ; \; x \ge -1 \\ y = -\sqrt[3]{-1-x^3} & ; \; x \le -1 \end{cases}$$

إذن
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3+1} & ; \; x \ge -1 \\ -\sqrt[3]{-1-x^3} & ; \; x \le -1 \end{cases}$$

ج- انشاء منحنى التقابل العكسي

لدينا منحنى f^{-1} هو صورة (C) بالتماثل المحوري الذي محوره المستقيم الذي معادلته $y = x$ (أنظر الشكل السابق).

* * * *

3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^3+1} - 4\sqrt[4]{x^3+1}$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- حدد نهاية f عند $+\infty$ (ضع $X = \sqrt[12]{x^3+1}$)

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في -1

ب- حدد جدول تغيرات الدالة f

3- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

ب- أنشئ المنحنى (C)

4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[0, +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

ب- انشئ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم.

1- أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow x^3 + 1 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 \ge -1$$
$$\Leftrightarrow x \ge -1$$

ومنه $D = [-1, +\infty[$

ب- نهاية الدالة f في $+\infty$

ليكن x عنصرا من D

نضع $X = \sqrt[12]{x^3+1}$ ومنه $X^{12} = x^3 + 1$

إذن
$$f(x) = 3\sqrt[3]{X^{12}} - 4\sqrt[4]{X^{12}} = 3X^4 - 4X^3$$

إذن
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} (3X^4 - 3X^3) = \lim_{X \to +\infty} 3X^4 = +\infty$$

2- أ- قابلية اشتقاق f على اليمين في -1

ليكن x عنصرا من D يخالف -1 لدينا

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x+1}$$
$$= \frac{1}{x+1}\left(3\sqrt[3]{x^3+1} - 4\sqrt[4]{x^3+1}\right)$$
$$= \frac{\sqrt[4]{x^3+1}}{x+1}\left(3 \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x^3+1}} - 4\right)$$

ولدينا
$$\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x^3+1}} = (x^3+1)^{1/3}(x^3+1)^{-1/4}$$
$$= (x^3+1)^{1/12}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x^3+1}}{x+1} = \sqrt[4]{\frac{x^3+1}{(x+1)^4}}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^3}}$$

إذن
$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^3}}\left(3\sqrt[12]{x^3+1} - 4\right)$$

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 3\sqrt[12]{x^3+1} - 4 = -4$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^3}} = +\infty$$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -1

ب- جدول تغيرات الدالة f

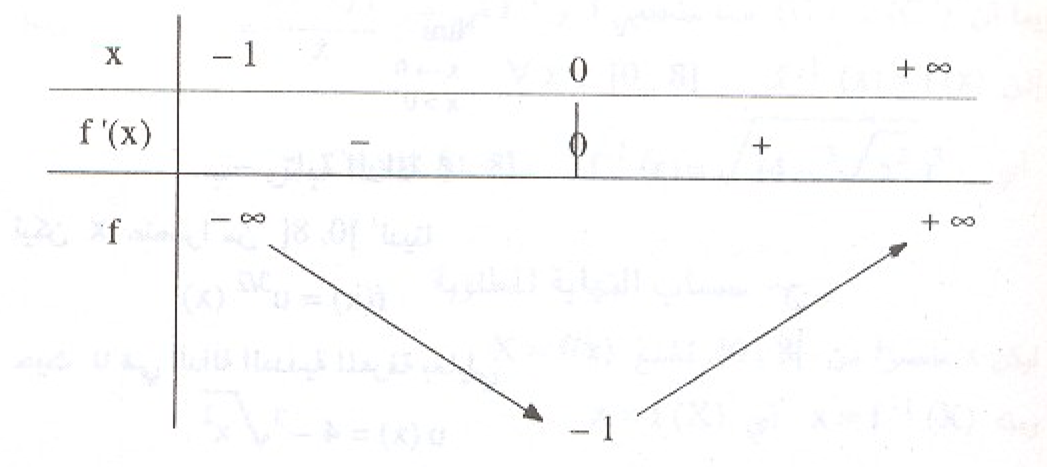
ليكن x عنصرا من $]-1, +\infty[$

لدينا
$$f(x) = 3(x^3+1)^{\frac{1}{3}} - 4(x^3+1)^{\frac{1}{4}}$$

ومنه
$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}(3x^2)(x^3+1)^{-\frac{2}{3}} - 4\frac{1}{4}(3x^2)(x^3+1)^{-\frac{3}{4}}$$
$$= 3x^2\left((x^3+1)^{-\frac{2}{3}} - (x^3+1)^{-\frac{3}{4}}\right)$$

ومنه
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x^3+1)^{-\frac{2}{3}} > (x^3+1)^{-\frac{3}{4}}$$
$$\Leftrightarrow [(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}]^{12} > [(x^3+1)^{-\frac{3}{4}}]^{12}$$
$$\Leftrightarrow (x^3+1)^{-8} > (x^3+1)^{-9}$$
$$\Leftrightarrow [(x^3+1)^{-8}]^{9} > [(x^3+1)^{-9}]^{9}$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 1 > 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

وبالمثل لدينا $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$



x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3- أ- الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

* لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x)}{x} = 3 . \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} - 4 . \frac{\sqrt[4]{x^3+1}}{x}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}} - 4\sqrt[4]{\frac{x^3+1}{x^4}}$$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^4} = 0$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

* ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا :

$$f(x) - 3x = 3\sqrt[3]{x^3+1} - 3x - 4\sqrt[4]{x^3+1}$$

$$= 3(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3}) - 4\sqrt[4]{x^3+1}$$

حسب المتطابقة الهامة : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

يكون لدينا

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3} = \frac{(x^3+1) - x^3}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2 + \sqrt[3]{x^3(x^3+1)} + x^2}$$

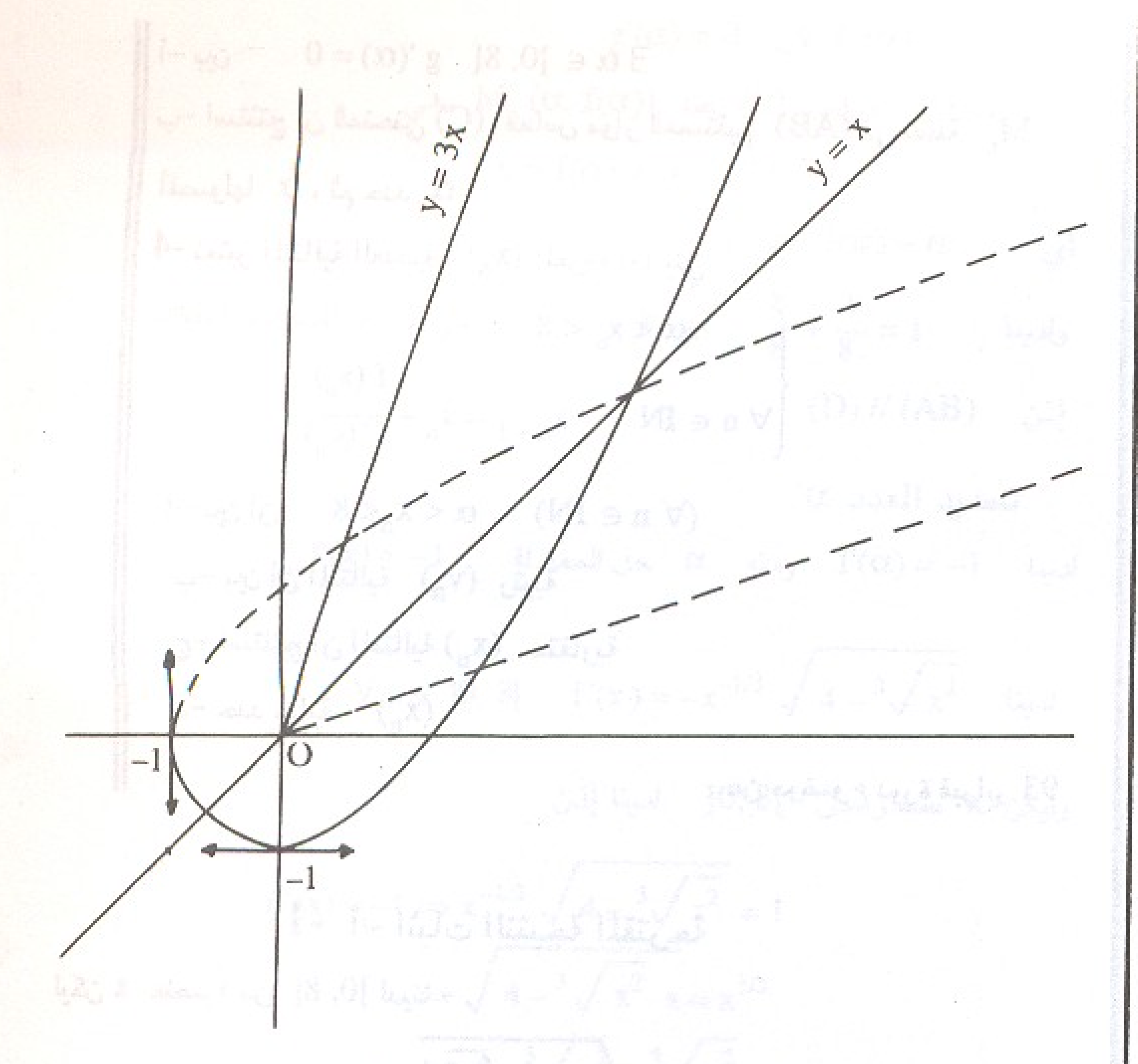
$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}$$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3} = 0$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 3x = -\infty$

ومنه (C) تقبل اتجاها مقاربا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = 3x$

ب- انشاء المنحنى (C)



4- أ- الدالة g تقابل

لدينا g متصلة على $]0, +\infty[$ وتزايدية قطعا على $]0, +\infty[$

ومنه g تقابل من IR_+ نحو $[\, f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f\, [$ أي نحو $[-1, +\infty[$

ب- انشاء منحنى الدالة g^{-1}

لدينا منحنى الدالة g^{-1} هو صورة منحنى g بالتماثل المتعامد الذي محوره المستقيم الذي معادلته $y = x$ (أنظر الشكل السابق).

* * * *

4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, 8]$ بمايلي

$$f(x) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3}$$

1- أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = -\infty$

ب- بين أن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $[0, 8]$

ج- بين أن الدالة f تقابل من $[0, 8]$ نحو $[0, 8]$

2- ليكن (C) و (C') المنحنيين الممثلين للدالة f ولتقابلها العكسي f^{-1} على التوالي في معلم متعامد ممنظم

أ- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ هو محور تماثل المنحنى (C)

ب- استنتج تعبير $f^{-1}(x)$ بدلالة x

ج- احسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x < 8}} \frac{f(x)}{x - 8}$

د- ارسم المنحنى (C)

3- نعتبر النقطتين $A(8, 0)$ و $B(0, 8)$ والدالة g المعرفة على $[0, 8]$ بمايلي

$$g(x) = f(x) + x - 8$$

أ- بين $\exists\, \alpha \in\ ]0, 8[\quad g'(\alpha) = 0$

ب- استنتج أن المنحنى (C) مماس مواز للمستقيم (AB) في نقطة M_o أفصولها α ، ثم حدد α

4- نعتبر المتتالية العددية (x_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} \alpha < x_o < 8 \\ \forall n \in IN \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

أ- بين أن $\alpha < x_n < 8 \quad (\forall n \in IN)$

ب- بين أن المتتالية (v_n) رتيبة

ج- استنتج أن المتتالية (x_n) متقاربة

د- حدد نهاية (x_n)

عن موضوع دورة فبراير 93

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]0, 8[$ لدينا

$$f(x) - 8 = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3} - 8$$
$$= (\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}})^3 - 2^3$$

لتسهيل العمليات الحسابية، نضع $X = \sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}$ ويكون لدينا

$$f(x) - 8 = X^3 - 2^3$$
$$= (X - 2)(X^2 + 2X + 4)$$

ولدينا
$$X - 2 = \sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}} - 2$$
$$= \frac{-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}} + 2}$$
$$= \frac{-\sqrt[3]{x^2}}{X + 2}$$

ومنه
$$\frac{f(x) - 8}{x} = \frac{-\sqrt[3]{x^2}}{x} \cdot \frac{X^2 + 2X + 4}{X + 2}$$
$$= -\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} \cdot \frac{X^2 + 2X + 4}{X + 2}$$
$$= -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \frac{X^2 + 2X + 4}{X + 2}$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} X = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}$$
$$= 2$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{X^2 + 2X + 4}{X + 2} = \frac{12}{4}$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = -\infty$$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = -\infty$$

ب- رتابة الدالة f

ليكن x عنصرا من $]0, 8[$ لدينا

$$f(x) = u^{3/2}(x)$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بمايلي

$$u(x) = 4 - \sqrt[3]{x^2}$$

ومنه
$$f'(x) = \frac{3}{2} u'(x) \sqrt{u(x)}$$

ولدينا
$$u(x) = 1 - x^{2/3}$$

ومنه
$$u'(x) = -\frac{2}{3} x^{-1/3}$$

إذن
$$f'(x) = -x^{-1/3} \sqrt{u(x)}$$

ومنه
$$\forall x \in\ ]0, 8[\quad f'(x) < 0$$

وهذا يعني أن الدالة تناقصية قطعا على $[0, 8]$

علما أنها متصلة على اليمين في 0 وعلى اليسار في 8

ج- التقابل f

لدينا f تناقصية قطعا على $[0, 8]$

f متصلة على $[0, 8]$

ومنه f تقابل من $[0, 8]$ نحو المجال I حيث

$$I = [f(8), f(0)]$$

لدينا
$$f(0) = \sqrt{4^3} = 8$$
$$f(8) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{64})^3} = \sqrt{(4-4)^3} = 0$$

إذن f تقابل من $[0, 8]$ نحو $[0, 8]$

2- أ- محور تماثل المنحنى (C)

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المنحنى (C) و M' صورتها بالتماثل المحوري الذي محوره (Δ)

لدينا (y, x) هو زوج احداثيتي M'

بما أن $M \in (C)$ فإن $y = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3}$

ومنه $y^2 = (4 - \sqrt[3]{x^2})^3$ أي $4 - \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2}$

بمعنى أن $\sqrt[3]{x^2} = 4 - \sqrt[3]{y^2}$

إذن $x^2 = (4 - \sqrt[3]{y^2})^3$ أي $x = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{y^2})^3}$

أي $x = f(y)$ وهذا ييعني أن $M' \in (C)$

إذن (Δ) محور تماثل المنحنى (C)

ب- الاستنتاج

لدينا (C ') هي صورة (C) بالتماثل المحوري الذي محوره (Δ)

ولدينا (Δ) هو محور تماثل (C)

إذن $(C') = (C)$

وبما أن (C') و (C) هما منحنيا f و f^{-1} في نفس المعلم فان $f = f^{-1}$

إذن $f^{-1}(x) = f(x)$ $\quad \forall x \in [0, 8]$

أي $f^{-1}(x) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3}$ $\quad \forall x \in [0, 8]$

ج- حساب النهاية المطلوبة

ليكن x عنصرا من $]0 , 8[$. نضع $X = f(x)$

ومنه $x = f^{-1}(X)$ أي $x = f(X)$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 8 \\ x < 8}} \frac{f(x)}{x-8} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{X}{f(X)-8} = 0$$

علما أن

$$\lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{f(X)-8}{X} = -\infty$$

د- رسم المنحنى (C)

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-8}{x} = -\infty$$

أي

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

ومنه يقبل (C) نصف مماس حامله يوازي محور الاراتيب عند النقطة $B(0, 8)$

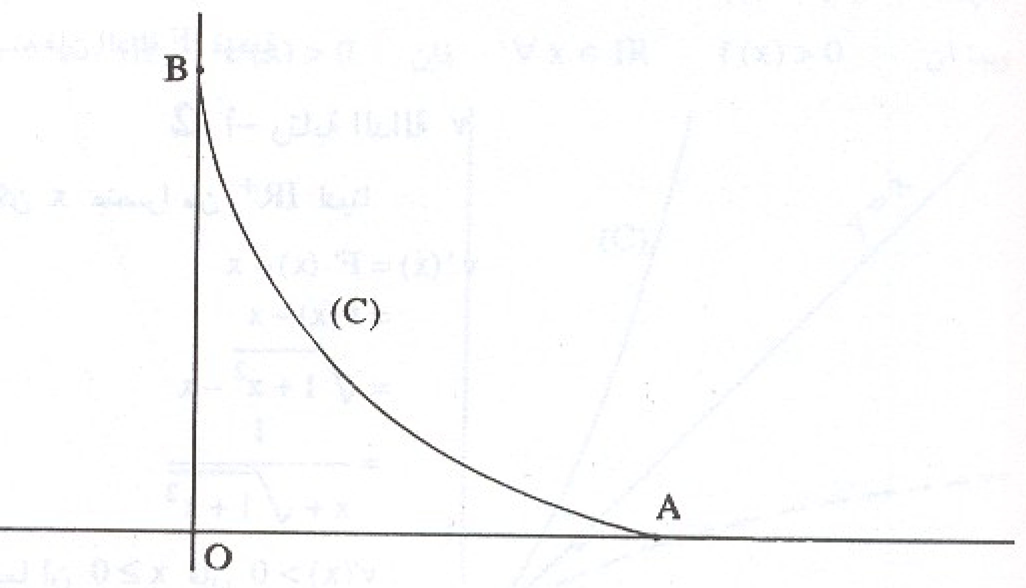
لدينا.

$$\lim_{\substack{x \to 8 \\ x < 8}} \frac{f(x)}{x-8} = 0$$

أي

$$\lim_{\substack{x \to 8 \\ x < 8}} \frac{f(x)-f(8)}{x-8} = 0$$

إذن يقبل (C) نصف مماس حامله هو محور الأفاصيل عند النقطة $A(8, 0)$



3-أ- وجود العدد α

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]0, 8[$ ومتصلة على $[0, 8]$

لدينا $g(0) = 0$ و $g(8) = 0$

وحسب مبرهنة رول لدينا

$$\exists\, \alpha \in]0, 8[\qquad g'(\alpha) = 0$$

ب- الاستنتاج

لدينا $g'(x) = f'(x) + 1$ $\quad \forall x \in]0, 8[$

ومنه $f'(\alpha) = -1$ لأن $g'(\alpha) = 0$

إذن معادلة (D) مماس (C) عند $M_o(\alpha, f(\alpha))$ هي

$$y = f(\alpha) + (x - \alpha)(-1)$$

أي

$$y = -x + f(\alpha) + \alpha$$

ولدينا $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} = 1$ أي $y = -x + 8$ هي معادلة المستقيم (AB)

إذن $(D) // (AB)$

تحديد العدد α

لدينا $f'(\alpha) = -1$ ومنه α حل للمعادلة $f'(x) = -1$

لدينا $f'(x) = -x^{-1/3}\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}$ $\quad \forall x \in]0, 8[$

وليكن x عنصرا من $]0, 8[$ لدينا إذن

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow x^{-1/3}\sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}} = x^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow 4 - \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

إذن $\alpha = 2\sqrt{2}$

4-أ- اثبات النتيجة المقترحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $\alpha < x_n < 8$ لأن $\alpha < x_o < 8$
- ليكن n عنصرا من IN

نفترض أن $0 < x_n < 8$ ونبين أن $\alpha < x_{n+1} < 8$

لدينا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

لدينا

$$f'(x_n) = -x_n^{-1/3}\sqrt{4 - \sqrt[3]{x_n^2}}$$

$$f(x_n) = (4 - \sqrt[3]{x^2})\sqrt{4 - \sqrt[3]{x_n^2}}$$

ومنه

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -x_n^{1/3}\,(4 - \sqrt[3]{x_n^2})$$

$$= -\sqrt[3]{x_n}\,(4 - \sqrt[3]{x_n^2})$$

إذن

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt[3]{x_n}\,(4 - \sqrt[3]{x_n^2})$$

$$= \sqrt[3]{x_n}\,(\sqrt[3]{x_n^2} + 4 - \sqrt[3]{x_n^2})$$

$$= 4\sqrt[3]{x_n}$$

وبما أن $\alpha < x_n < 8$ فان $\sqrt[3]{\alpha} < \sqrt[3]{x_n} < 2$

ولدينا $\alpha = 2\sqrt{2}$ أي $\alpha = (\sqrt{2})^3$ ومنه

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{x_n} < 2$$

ومنه $4\sqrt{2} < 4\sqrt[3]{x_n} < 8$

أي $2\alpha < u_{n+1} < 8$

إذن $\alpha < u_{n+1} < 8$

وبالتالي فإن $\forall n \in IN \quad \alpha < u_n < 8$

ب- رتابة المتتالية (u_n)

ليكن n عنصرا من IN . لدينا

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

بما أن $\forall x \in]0, 8[\quad f'(x) < 0$

و $\forall x \in]0, 8[\quad f(x) > 0$

فإن $x_{n+1} - x_n > 0$ أي $x_n < x_{n+1}$

إذن المتتالية (x_n) تزايدية قطعا

ج- الاستنتاج

لدينا (x_n) مكبورة بالعدد 8

لدينا (x_n) تزايدية

ومنه (x_n) متقاربة

د- تحديد نهاية المتتالية (x_n)

لدينا $x_{n+1} = 4\sqrt[3]{x_n} \quad \forall n \in IN$

(أنظر حل السؤال الرابع الجزء أ منه)

أي $x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \in IN$

حيث g هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [\alpha, 8] \quad g(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

الدالة g متصلة على $[\alpha, 8]$ وتزايدية قطعا على $[\alpha, 8]$

ومنه

$$g([\alpha, 8]) = [g(\alpha), g(8)] = [4\sqrt{2}, 8]$$

إذن $g([\alpha, 8]) \subset [\alpha, 8]$

وبما أن (x_n) متقاربة فإن نهايتها β هي حل للمعادلة $g(x) = x$

نيكن x عنصرا من $[\alpha, 8]$. لدينا

$$g(x) = x \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{x} = x$$
$$\Leftrightarrow 64x = x^3$$
$$\Leftrightarrow 64 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x = 8$$

إذن $\lim x_n = 8$

* * * *

5

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

ولتكن F دالتها الأصلية التي تنعدم في 0 .(C) منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- نعتبر الدالة العددية u المعرفة بمايلي

$$(\forall x \in IR) \quad u(x) = F(-x) + F(x)$$

أ- حدد الدالة المشتقة للدالة u

ب- استنتج أن الدالة F فردية

2- نعتبر الدالة العددية v المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR^+ \quad v(x) = F(x) - \frac{1}{2}x^2$$

أ- بين أن الدالة v تزايدية قطعا على IR^+

ب- استنتج أن $\forall x \in IR^+ \quad F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

3- أ- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- حدد نقطة انعطاف المنحنى (C) ومعادلة مماس (C) في هذه النقطة.

ج- انشئ المنحنى (C)

4- أ- بين أن F تقابل من IR نحو مجال I يجب تحديده

ب- انشئ منحنى تقابلها العكسي في نفس المعلم.

1- أ- تحديد الدالة المشتقة للدالة u

لدينا F قابلة للاشتقاق على IR ولدينا $F' = f$

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$u'(x) = -F'(-x) + F'(x) = -f(-x) + f(x)$$

وبما أن $f(-x) = f(x)$ فإن $u'(x) = 0$

إذن $\forall x \in IR \quad u'(x) = 0$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in IR \quad u'(x) = 0$

ومنه $\forall x \in IR \quad u(x) = u(0)$

وبما أن $F(0) = 0$ فإن $u(0) = 0$

إذن $\forall x \in IR \quad u(x) = 0$

أي $\forall x \in IR \quad F(-x) = -F(x)$

ومنه فإن الدالة F فردية

2- أ- رتابة الدالة v

ليكن x عنصرا من IR^+ لدينا

$$v'(x) = F'(x) - x = f(x) - x = \sqrt{1 + x^2} - x = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

وبما أن $x \geq 0$ فإن $v'(x) > 0$

إذن v تزايدية قطعا على IR^+

ب- الاستنتاج

لدينا v تزايدية قطعا على IR^+ ومنه

$$\forall x \in IR^+ \quad v(x) \geq v(0)$$

أي $\forall x \in IR^+ \quad v(x) \geq 0$

ومنه $\forall x \in IR^+ \quad F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

3-أ- الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

لدينا $\forall x \in IR^+ \quad F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

ولدينا $(\forall x \in IR_*^+) \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{2}x$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

إذن (C) يقبل اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأراتيب

ب- نقطة انعطاف المنحنى

لدينا f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$F(x) = f(x)$$

ومنه $F''(x) = f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

إذن F'' تنعدم في 0 وتغير اشارتها

ومنه النقطة O هي نقطة انعطاف المنحنى (C)

معادلة مماس (C) في O

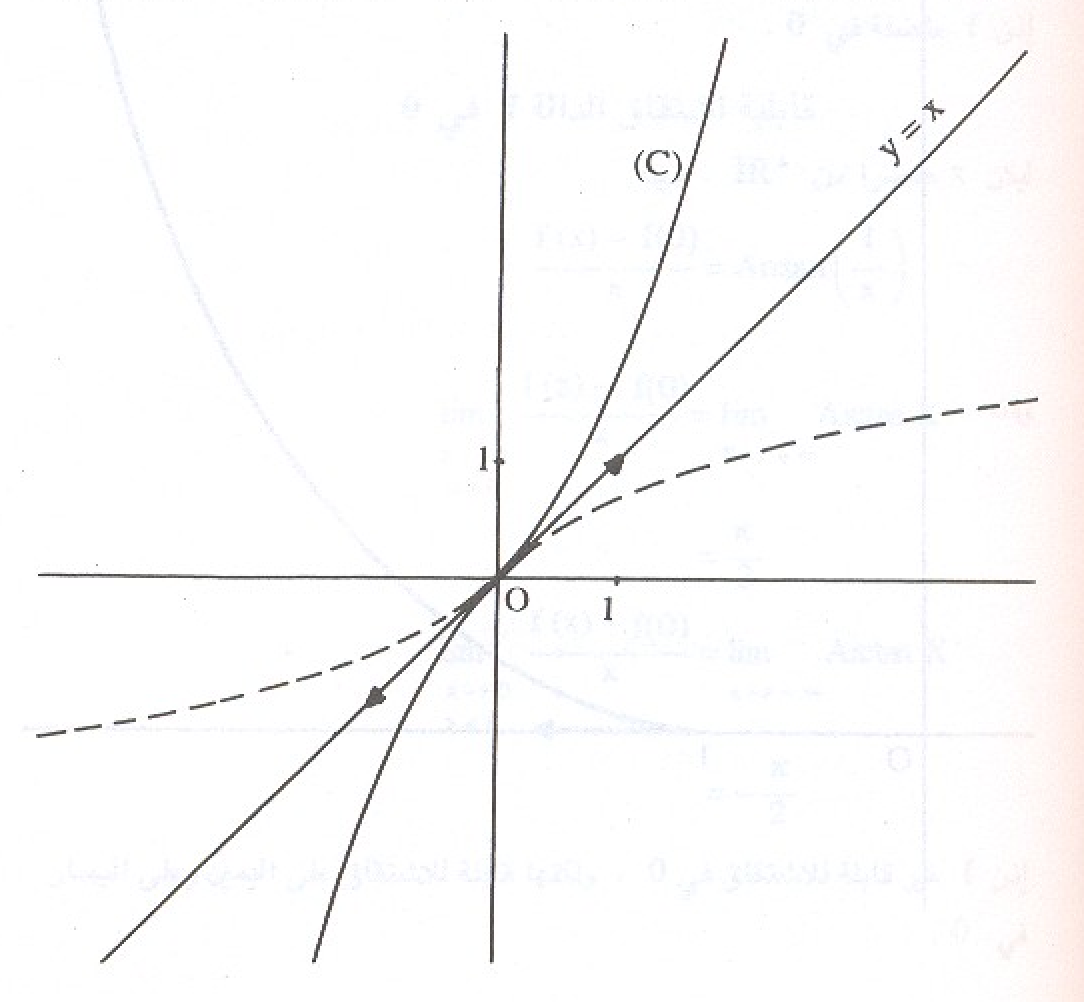
لدينا $F(0) = 0$ و $F'(0) = f(0) = 1$

ومنه $y = x$ هي معادلة مماس (C) في O

ج- انشاء المنحنى

لدينا $\forall x \in IR \quad F'(x) = f(x)$

وبما أن $\forall x \in IR \quad f(x) > 0$ فإن $\forall x \in IR \quad F'(x) > 0$



4-أ- التقابل F

لدينا F تزايدية قطعا على IR

ولدينا F متصلة على IR لأنها قابلة للاشتقاق على IR

ومنه F تقابل من IR نحو المجال I حيث

$$I =]\lim_{x \to -\infty} F, \lim_{x \to +\infty} F[=]-\infty, +\infty[$$

ب- انشاء منحنى التقابل العكسي

لدينا منحنى التقابل العكسي للتقابل F هو صورة (C) بالتماثل المتعامد الذي محوره المستقيم الذي معادلته $y = x$ (أنظر الشكل السابق).

* * * *

6

لتكن f الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$(\forall x \in [1, +\infty[) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

ولتكن F دالتها الأصلية التي تنعدم في 1

1- أ- بين أنه مهما يكن x من $]1, +\infty[$ فإن

$$0 < F(x) < (x-1) f(x)$$

ب- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

2- نعتبر الدالة العددية u المعرفة بمايلي

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad u(x) = F(x) - \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x-1)^5}$$

أ- بين أن الدالة u تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $]1, +\infty[$

$$\frac{3}{5}(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2} \leq F(x)$$

ج- استنتج النهايتين التاليتين

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$$

3- ليكن (C) منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم

أ- حدد الفرع اللانهائيّ للمنحنى (C)

ب- حدد معادلة نصف مماس (C) في نقطة منه افصولها 1

ج- انشئ المنحنى (C)

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

لدينا F متصلة على $[1, x]$ لأنها قابلة للاشتقاق على $[1, +\infty[$

و F قابلة للاشتقاق على $]1, x[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists \alpha \in]1, x[\quad F(x) - F(1) = (x-1) F'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]1, x[\quad F(x) = (x-1) f(\alpha)$

لدينا $1 < \alpha < x$ أي $1 < \alpha^2 < x^2$

ومنه $0 < \alpha^2 - 1 < x - 1$ أي $0 < \sqrt[3]{\alpha^2 - 1} < \sqrt[3]{x^2 - 1}$

وبما أن $x - 1 > 0$ فإن $0 < (x-1) f(\alpha) < (x-1) f(x)$

إذن $0 < F(x) < (x-1) f(x)$

وبالتالي فإن $\forall x \in]1, +\infty[\quad 0 < F(x) < (x-1) f(x)$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in]1, +\infty[\quad 0 < F(x) < (x-1) f(x)$

أي $\forall x \in]1, +\infty[\quad 0 < \frac{F(x)}{x-1} < f(x)$

وبما أن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt[3]{x^2 - 1} = 0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 0$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

2-أ- رتابة الدالة u

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$. لدينا

$$u(x) = F(x) - \frac{3}{5}(x-1)^{5/3}$$

منه $u'(x) = F'(x) - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$

$$= f(x) - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$= \sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

إذن $u'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} > \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

ومنه $\forall x \in [1, +\infty[\quad u'(x) \geq 0$

وهذا يعني أن u تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

ب- الاستنتاج

لدينا u تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$ ومنه

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad u(x) \geq u(1)$$

ولدينا $u(1) = 0$ لأن $F(1) = 0$ ومنه

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad u(x) \geq 0$$

أي $\forall x \in [1, +\infty[\quad F(x) \geq \frac{3}{5} \sqrt[3]{(x-1)^5}$

بمعنى أن $\forall x \in [1, +\infty[\quad F(x) \geq \frac{3}{5}(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}$

ب- حساب النهايتين

* لدينا $\forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{3}{5}(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2} \leq F(x)$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

* لدينا $\forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt[3]{(x-1)^2} \leq \frac{F(x)}{x}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty$$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

3-أ- الفروع اللانهائي للمنحنى (C)

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$$

إذن (C) تقبل اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأراتيب

ب- معادلة نصف مماس (C)

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 0$

ومنه $F'(1) = 0$

وبما أن $F(1) = 0$ فإن معادلة نصف مماس (C) في النقطة $A(1, 0)$ هي $y = 0$

ج- انشاء المنحنى

لدينا $\forall x \in [1, +\infty[\quad F'(x) = f(x)$

وبما أن $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) > 0$ فإن F تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

O 1

7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR^* \quad f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$f(0) = 0$$

1- أ- ادرس اتصال وقابلية اشتقاق f في 0

ب- احسب f عند $+\infty$

2- أ- بين أن مهما يكن x من IR_+^* فإن

$$\frac{x}{x^2+1} < \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب- استنتج منحنى تغيرات الدالة f

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

3- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- حدد معادلة نصفي مماسي (C) في O

ب- انشئ المنحنى (C) .

1- أ- اتصال الدالة f في 0

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to +\infty} \operatorname{Arctan} X = \frac{\pi}{2}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0 = f(0)$$

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to -\infty} \operatorname{Arctan} X = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 0 = f(0)$$

إذن f متصلة في 0 .

قابلية اشتقاق الدالة f في 0

ليكن x عنصرا من IR^* . لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{X \to +\infty} \operatorname{Arctan} X = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{X \to -\infty} \operatorname{Arctan} X = -\frac{\pi}{2}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0 ، ولكنها قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في 0 .

ب- نهاية الدالة f عند $+\infty$

لدينا
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(1/x)}{1/x} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \frac{\operatorname{Arctan} X}{X} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha>0}} \frac{\alpha}{\tan \alpha} = 1$$

إذن
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

2- أ- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \quad g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

لدينا g قابلة للاشتقاق على IR_+^*

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-1)-(1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-2}{(x^2+1)^2}$$

إذن
$$\forall x \in IR_+^* \quad g'(x) < 0$$

لدينا
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \frac{\pi}{2}$$

وبما أن g متصلة على IR_+^* وتناقصية قطعا على IR_+^*

فإن
$$g(IR_+^*) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

ومنه
$$(\forall x \in IR_+^*) \ g(x) > 0$$

أي
$$\forall x \in IR_+^* \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{x^2+1}$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f'(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

وحسب السؤال السابق لدينا

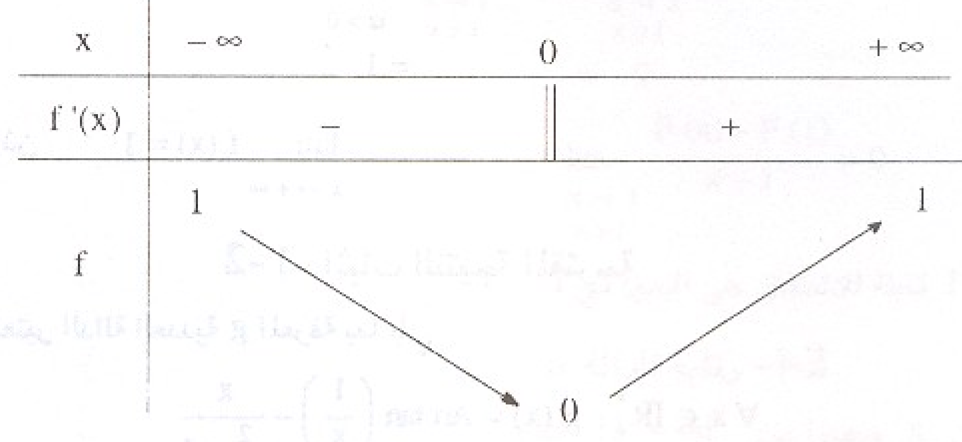
$$\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) > 0$$

إذن f تزايدية قطعا على IR_+

وبما أن الدالة f زوجية لأن الدالة Arctan فردية

فإن f تناقصية قطعا على IR_-

ج- جدول تغيرات الدالة f



x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		−	‖	+	
f	1	↘	0	↗	1

3-أ- معادلة نصفي مماسي (C) في O

لدينا حسب السؤال الأول الجزء أ منه

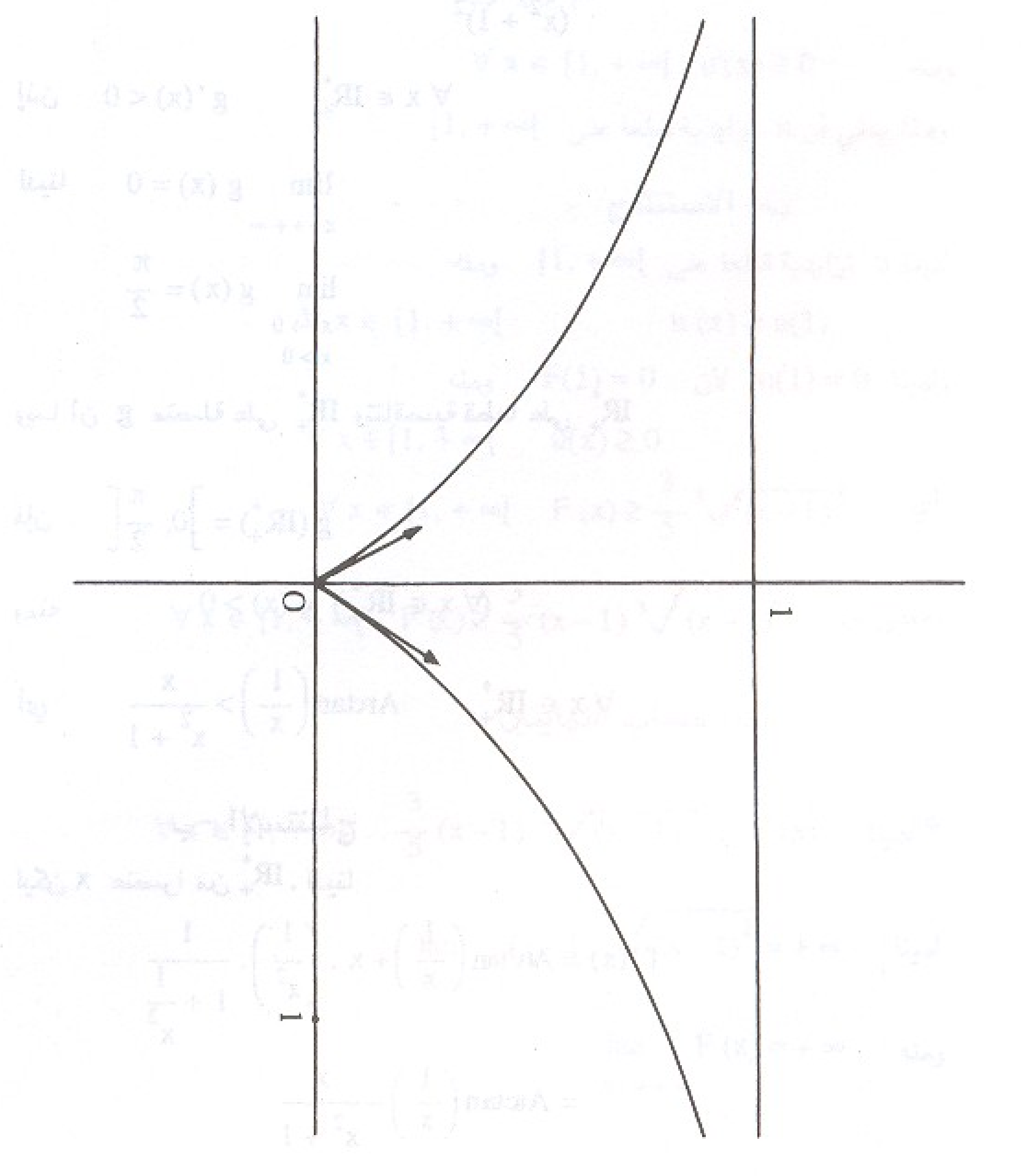
$$f_d'(0) = \frac{\pi}{2} \quad و \quad f'_g(0) = -\frac{\pi}{2}$$

ولدينا $f(0) = 0$

إذن معادلتا نصفي مماسي (C) في O هما

$$y = -\frac{\pi}{2}x \quad و \quad y = \frac{\pi}{2}x$$

ب- إنشاء المنحنى (C)



نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي **8**

$$f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- احسب نهاية f عند $+\infty$

2- ادرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0

3- أ- حدد الدالة المشتقة للدالة f

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4- أ- بين أنه مهما يكن x من IR_+^* فإن

$$\frac{\pi}{2}x - f(x) = x \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

ب- استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

5- بين أن f تقابل من IR+ نحو مجال I يجب تحديده.

6- انشئ (C) ومنحنى التقابل العكسي للدالة f في نفس المعلم

1- أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow x \geq 0$$

ومنه $D = [0, +\infty[$

ب- نهاية الدالة f عند $+\infty$

لدينا $\forall x \in D \quad f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$

ولدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{X^2}{X+1}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} X$$

$$= +\infty$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2- قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من $D - \{0\}$. لدينا

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\sqrt{x}+1} = 0$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \operatorname{Arctan} 0$$

$$= 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

3-أ- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا

$$f(x) = x \operatorname{Arctan} u(x)$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

ومنه

$$f'(x) = \operatorname{Arctan} u(x) + x\, u'(x) \cdot \frac{1}{1+u^2(x)}$$

لدينا

$$u'(x) = \frac{(\sqrt{x}+1) - x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

ولدينا

$$1+u^2(x) = 1 + \frac{x^2}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + x^2}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

إذن

$$f'(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) + \frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2+(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x(\sqrt{x}+2)}{x^2+(\sqrt{x}+1)^2}$$

ب- جدول تغيرات الدالة f

لدينا لكل x من $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x(\sqrt{x}+2)}{x^2+(\sqrt{x}+1)^2}$$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا $0 < \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ ومنه

$$\operatorname{Arctan} 0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$$

لأن الدالة Arctan تزايدية قطعا على IR

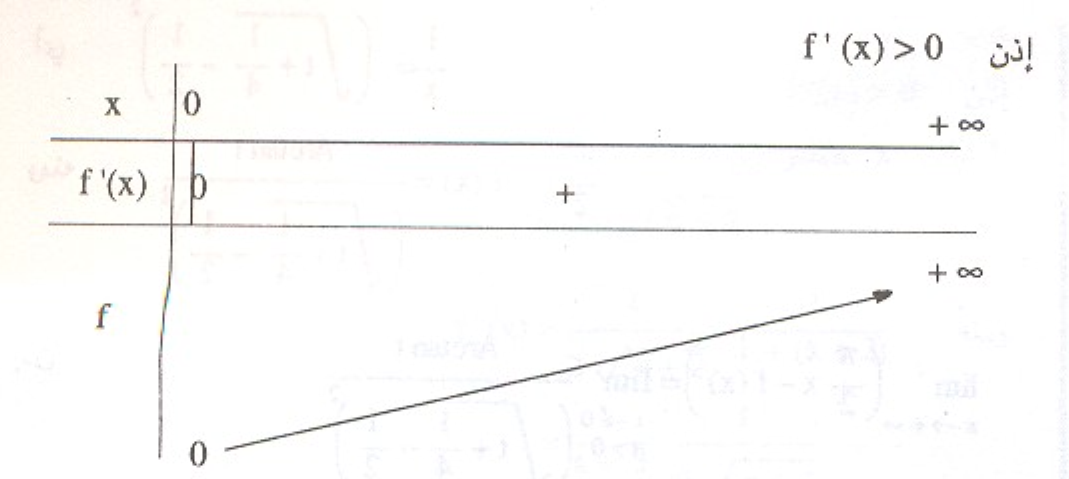
ومنه

$$0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$$

ولدينا

$$\frac{x(\sqrt{x}+2)}{x^2+(\sqrt{x}+1)^2} > 0$$

إذن $f'(x) > 0$



4-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$\frac{\pi}{2}x - f(x) = \frac{\pi}{2}x - x\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)\right)$$

إذن لإثبات

$$\frac{\pi}{2}x - f(x) = x\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

يكفي أن نبين أن

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) = \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

لهذا نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \quad g(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$$

لدينا

$$(\forall x \in IR_+^*)\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

أي $\forall x \in IR_+^* \quad g'(x) = 0$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad g(x) = g(1)$

أي $(\forall x \in IR_+^*)\ g(x) = \dfrac{\pi}{2}$

إذن

$$\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{x}+1}{x} + \operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{\pi}{2}$$

ومنه

$$\frac{\pi}{2}x - f(x) = x\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)$$

ب- الاستنتاج

* ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا

$$\frac{\pi}{2}x - f(x) = x\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

نضع $t = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$ أي $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

ومنه

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\right)^2 = t + \frac{1}{4}$$

إذن

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

أي $\frac{1}{x} = \left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$

ومنه $\frac{\pi}{2} x - f(x) = \dfrac{\text{Arctan } t}{\left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2}$

إذن

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} x - f(x)\right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{\text{Arctan } t}{\left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{\text{Arctan } t}{t^2}\left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{\text{Arctan } t}{t} \cdot \frac{\left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2}{t}$$

لدينا $\lim_{t \to 0} \frac{\text{Arctan } t}{t} = 1$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2}{t} = +\infty$$

ومنه $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} x - f(x)\right) = +\infty$

أي $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2} x\right) = -\infty$

ولدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* إذن (C) يقبل اتجاها مقاربا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = \frac{\pi}{2} x$

5- الدالة f تقابل

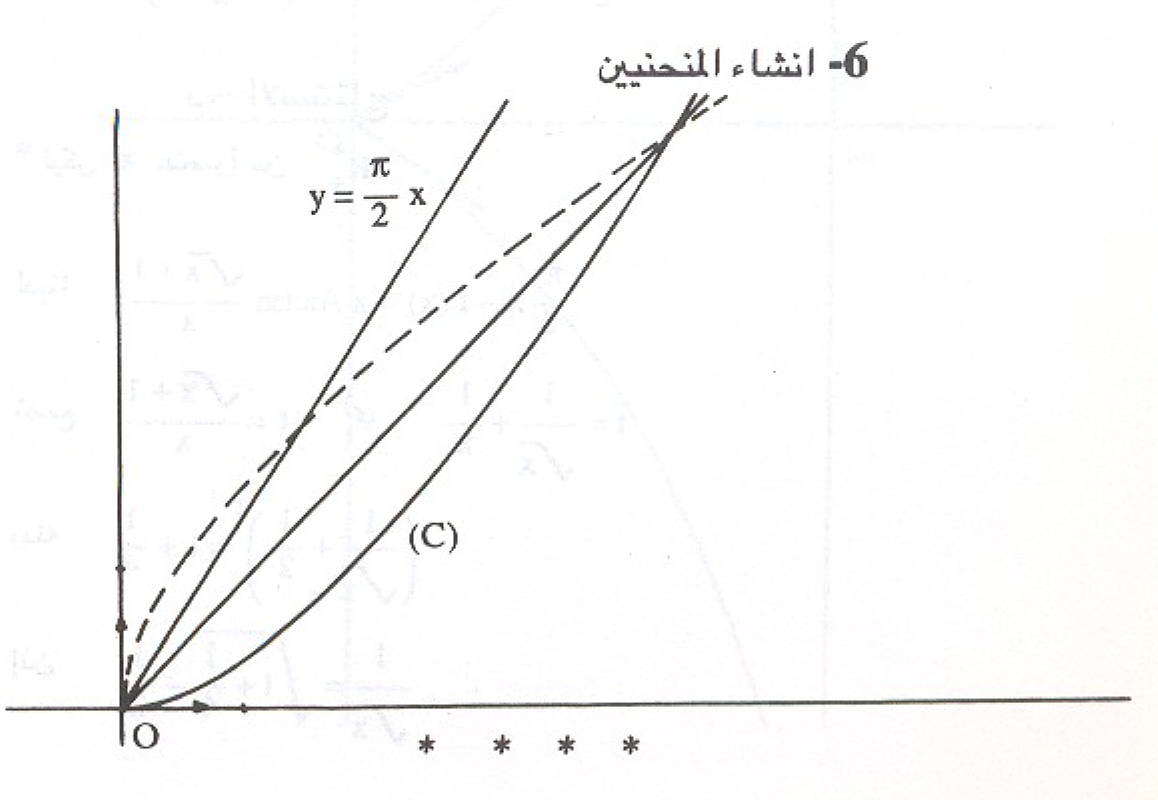
لدينا f متصلة على D

لدينا f تزايدية قطعا على D

ومنه f تقابل من D نحو المجال I حيث

$$I = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f[= [0, +\infty[$$

6- انشاء المنحنيين



* * * *

9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; \quad x < -2 \\ \text{Arctan} \sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \end{cases}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد المنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I- 1- أثبت أن الدالة f متصلة في -2.

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في -2.

ب- بين أن $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\alpha}{\tan^2 \alpha}$

ج- استنتج أن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -2.

3- اعط جدول تغيرات الدالة f

4- أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

ب- بين أن $\forall x \in]-\infty, -2[\quad f(x) - (2x+3) > 0$

ج- انشئ المنحنى (C)

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, -2[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J

II- ليكن h قصور الدالة f على $[0, 2]$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = h(u_n)$ لكل n من IN

1- أ- بين أن $\forall x \in IR^+ \quad \text{Arctan } x \leq x$

ب- بين أن $\forall n \in IN \quad 0 < u_n \leq 2$

ج- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

2- أ- بين أن المعادلة $h(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0, 2[$

ب- بين أن $h([0, 2]) \subset [0, 2]$

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

من موضوع دورة فبراير 96

I-1- الدالة f متصلة في -2

* لدينا $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} = 0$

ولدينا $f(-2) = \text{Arctan} \sqrt{-2+2} = 0$

ومنه $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = f(-2)$

* لدينا

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \text{Arctan} \sqrt{x+2} = \text{Arctan} \sqrt{-2+2} = f(-2)$$

* إذن f متصلة في -1.

2- أ- قابلية اشتقاق f على اليسار في -2

ليكن x عنصرا من $]-\infty, -2[$. لدينا

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\frac{x+2-\sqrt{x^2+2x}}{x+2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}$$

$$=1+\sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+2)^2}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} \frac{x}{x+2}=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=+\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في -2

ب- اثبات المتساوية المقترحة

ليكن x عنصرا من $]-2,+\infty[$. لدينا

$$\frac{f(x)}{x+2}=\frac{\text{Arctan}\sqrt{x+2}}{x+2}$$

نضع $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\alpha=\text{Arctan}\sqrt{x+2}$ ومنه

$\sqrt{x+2}=\tan\alpha$ أي $x+2=\tan^2\alpha$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}}\frac{f(x)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha>0}}\frac{\alpha}{\tan^2\alpha}$

ج- الاستنتاج

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}}\frac{f(x)}{x+2}$

$$=\lim_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha>0}}\frac{\alpha}{\tan^2\alpha}$$

$$=\lim_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha>0}}\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha>0}}\frac{\alpha}{\tan\alpha}=1$ و $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha>0}}\frac{1}{\tan\alpha}=+\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -2

3- جدول تغيرات الدالة f

* ليكن x عنصرا من $]-\infty,-2[$. لدينا

$$f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x}$$

ومنه $f'(x)=1-\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}$

$$=1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

لدينا $x<-2$ ومنه $x+1<0$

إذن $f'(x)>0$

* ليكن x عنصرا من $]-2,+\infty[$. لدينا

$$f(x)=\text{Arctan}\sqrt{x+2}$$

ومنه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot\frac{1}{1+(x+2)}$

$$=\frac{1}{x+3}\ \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

لدينا $x>-2$ ومنه $x+3>0$

إذن $f'(x)>0$

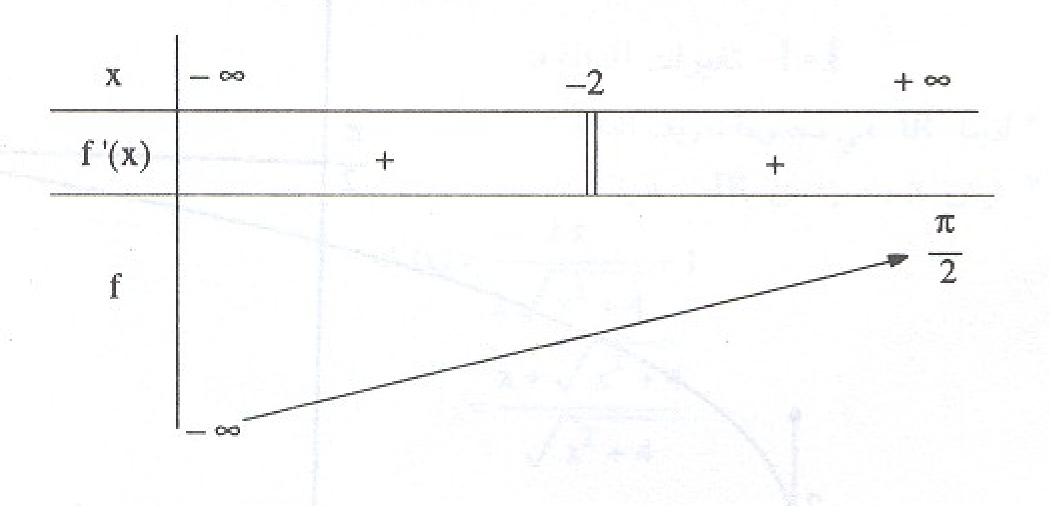
* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arctan}\sqrt{x+2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\text{Arctan}\,x$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)-\sqrt{x^2+2x}$$

$$=-\infty$$



x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
f	$-\infty$	↗			$\frac{\pi}{2}$

4- أ- الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$ ومنه (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=\frac{\pi}{2}$ بجوار $+\infty$

* لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}$$

$$=2$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty} -x+2-\sqrt{x^2+2x}$

$$=\lim_{x\to-\infty} 2-(\sqrt{x^2+2x}+x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} 2-\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} 2-\frac{2}{-\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}-1}$$

$$=3$$

إذن يقبل (C) مقاربا مائلا معادلته $y = 2x + 3$ بجوار $-\infty$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]-\infty, -2[$ لدينا

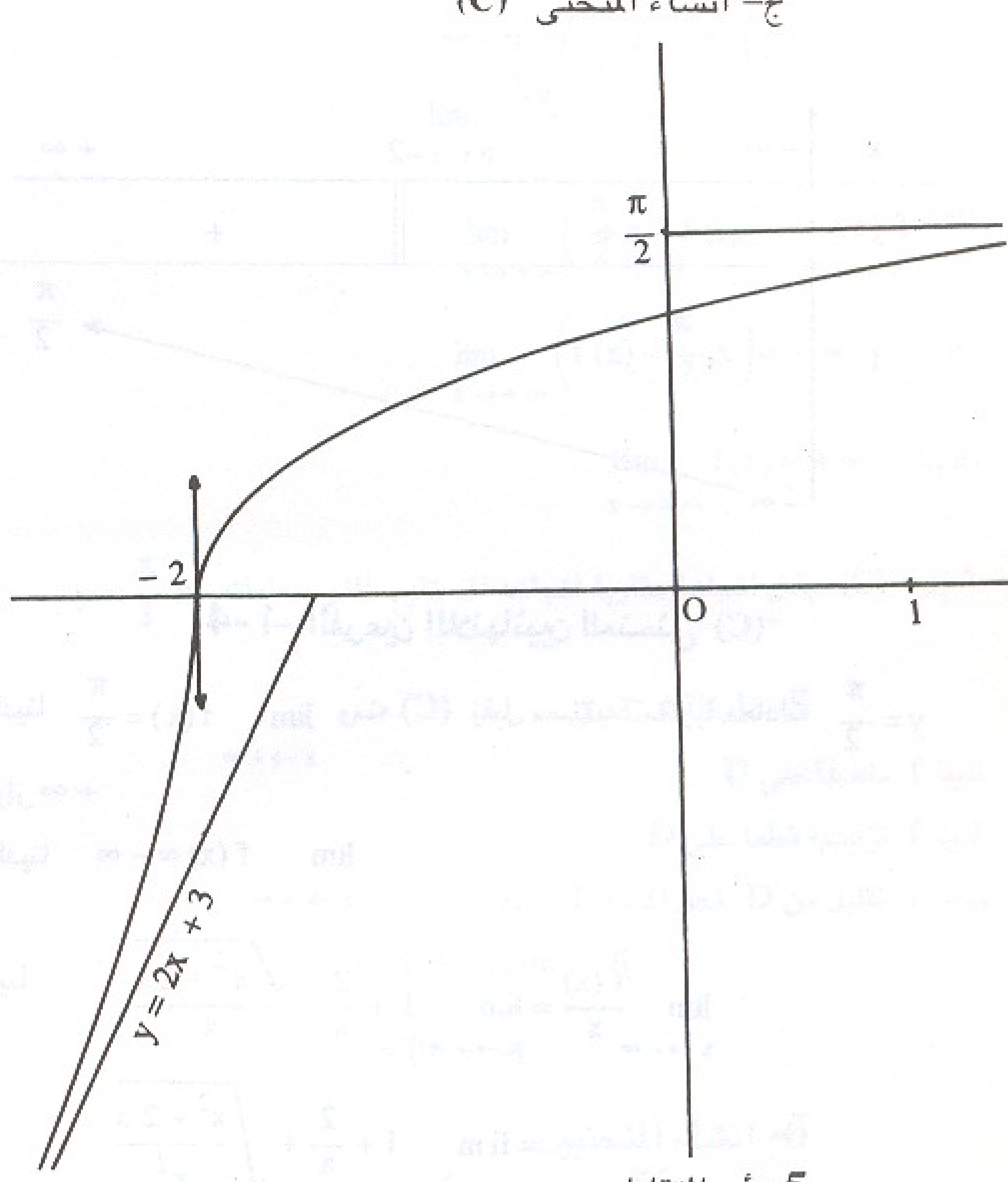
$$f(x) - (2x+3) = x + 2 - \sqrt{x^2+2x} - 2x - 3$$
$$= -x - 1 - \sqrt{x^2+2x}$$
$$= -(\sqrt{x^2+2x} + (x+1))$$
$$= -\frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}$$

لدينا $x < -2$ ومنه $x + 1 < 0$

إذن $\sqrt{x^2+2x} - (x+1) > 0$

أي $f(x) - (2x+3) > 0$

ج- انشاء المنحنى (C)



5- أ- التقابل

لدينا g متصلة على I لأن f قابلة للاشتقاق على I

لدينا g تزايدية قطعا على I

إذن g تقابل من I نحو المجال J حيث

$$J =]\lim_{x \to -\infty} f, f(-2)[$$
$$=]-\infty, 0[$$

ب- تحديد التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من J و y عنصرا من I . لدينا

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = y + 2 - \sqrt{y^2+2y}$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = y - \sqrt{y^2+2y}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = y - \sqrt{y^2+2y} \\ x-2 = \dfrac{-2y}{y+\sqrt{y^2+2y}} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - \sqrt{y^2+2y} = x-2 \\ y + \sqrt{y^2+2y} = \dfrac{-2y}{x-2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2y = x - 2 - \frac{2y}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow 2y\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) = x - 2$$
$$\Leftrightarrow 2y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x-1}$$

إذن $\forall x \in J \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x-1}$

II- 1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا Arctan متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists \alpha \in]0, x[\quad \text{Arctan } x - \text{Arctan } 0 = x \, \text{Arctan}'(\alpha)$$

أي $\exists \alpha \in]0, x[\quad \text{Arctan } x = \frac{x}{1+\alpha^2}$

وبما أن $\frac{1}{1+\alpha^2} < 1$ فإن $\text{Arctan } x < x$

ولدينا $\text{Arctan } 0 \le 0$ ومنه

$$\forall x \in IR+ \quad \text{Arctan } x \le x$$

ب- المتتالية (u_n) محدودة

• من أجل $n = 0$ لدينا $0 < u_n \le 2$ لأن $u_o = 2$

• ليكن n عنصرا من IN

نفترض أن $0 < u_n \le 2$ ونبين أن $0 < u_{n+1} \le 2$

لدينا $u_{n+1} = h(u_n)$

$$= \text{Arctan}\sqrt{u_n + 2}$$

وبما أن $0 < u_n \le 2$ فإن $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$

وبما أن الدالة Arctan تزايدية قطعا على IR فإن

$$0 < \text{Arctan}\sqrt{u_n+2} < \text{Arctan } 2$$

أي $0 < u_{n+1} \le \text{Arctan } 2$

وبما أن $\text{Arctan } 2 \le 2$ (أنظر السؤال السابق) فإن

$$0 < u_{n+1} \le 2$$

إذن $\forall n \in IN \quad 0 < u_n \le 2$

ج- رتابة المتتالية (u_n)

بين بالترجع أن $u_{n+1} < u_n$ $\quad \forall n \in IN$

• من أجل $n = 0$ لدينا $u_{n+1} < u_n$ لأن

$u_o = 2$ و $u_1 = \text{Arctan } 2$ و $\text{Arctan } 2 < 2$

• ليكن n عنصرا من IN

نفترض أن $u_{n+1} < u_n$ وبين أن $u_{n+2} < u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1} < u_n$ والدالة h تزايدية قطعا على $[0, 2]$ ومنه

$h(u_{n+1}) < h(u_n)$ أي $u_{n+2} < u_{n+1}$

• إذن $u_{n+1} < u_n$ $\quad \forall n \in IN$

وهذا يعني أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

2-أ- حل المعادلة $h(x) = x$

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة بمايلي

$$\varphi(x) = h(x) - x \qquad \forall x \in [0, 2]$$

* ليكن x عنصرا من $[0, 2]$. لدينا

$$\varphi'(x) = h'(x) - 1$$
$$= f'(x) - 1$$
$$= \frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+2}} - 1$$

وبما أن $0 \le x \le 2$ فإن $3 \le x + 3 \le 5$

و $\sqrt{2} \le \sqrt{x+2} \le 4$

ومنه $6\sqrt{2} \le 2(x+3)\sqrt{x+2} \le 40$

إذن $$\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+2}} < \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

ومنه $$\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+2}} - 1 < 0$$

إذن φ تناقصية قطعا على $[0, 2]$

* وبما أن φ متصلة على $[0, 2]$ فإنها تقابل من $[0, 2]$ نحو المجال K حيث

$$K = [\text{Arctan } 2 - 2, \text{Arctan } \sqrt{2}]$$

وبما أن $0 \in K$ فإن $\varphi(\alpha) = 0 \quad \exists ! \alpha \in]0, 2[$

إذن $h(\alpha) = \alpha \quad \exists ! \alpha \in]0, 2[$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا h متصلة على $[0,2]$ وتزايدية قطعا على $[0, 2]$

ومنه $h([0, 2]) = [h(0), h(2)]$
$= [\text{Arctan } \sqrt{2}, \text{Arctan } 2]$

بما أن $\text{Arctan } 2 \le 2$ و $0 < \text{Arctan } \sqrt{2}$ فإن

$h([0, 2]) \subset [0, 2]$

ج- الاستنتاج

* لدينا (u_n) تناقصية قطعا

لدينا (u_n) مصغورة بالعدد 0

ومنه (u_n) متقاربة

* لدينا $u_{n+1} = h(u_n)$ $\quad \forall n \in IN$

$0 < u_n \le 2$ $\quad \forall n \in IN$

إذن نهاية (u_n) هي حل المعادلة $h(x) = x$

ومنه $\lim u_n = \alpha$

* * * *

10

نعتبر الدالتين العدديتين u و v المعرفتين بمايلي

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 4} + x - 1$$
$$f(x) = \text{Arcsin } u(x)$$

1- أ- ادرس تغيرات الدالة u

ب- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2- أ- ادرس اشتقاق f على اليسار في 0

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

3- ليكن (T) منحنى الدالة u و (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (T)

د- حدد معادلة مماس (T) في النقطة $A(0, 1)$

ج- انشئ المنحنيين (T) و (C)

1- أ- تغيرات الدالة u

* لدينا IR هي مجموعة تعريف الدالة f

* ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + 1$$
$$= \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

لدينا $x^2 < x^2 + 4$ ومنه $|x| < \sqrt{x^2+4}$ وبما أن $-x \le |x|$

فإن $-x < \sqrt{x^2+4}$ أي $\sqrt{x^2+4} + x > 0$

إذن $u'(x) > 0 \quad (\forall x \in IR)$

* لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

لدينا

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+4) - x^2}{\sqrt{x^2+4} - x} - 1$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4} - x} - 1$$
$$= -1$$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+4} - x = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ب– تحديد D مجموعة تعريف الدالة f

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow -1 \le u(x) \le 1$$

لدينا u تزايدية قطعا على IR و $u(0) = 1$ ومنه

$$\forall x \in]-\infty, 0[\quad -1 < u(x) \le 1$$

علما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} u = -1$

ولدينا $\forall x \in]0, +\infty[\quad 1 < u(x)$

إذن $x \in D \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0]$

ومنه $D =]-\infty, 0]$

2-أ– اشتقاق الدالة f على اليسار 0

ليكن x عنصرا من IR^* لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}(\text{Arc}\sin u(x) - \text{Arc}\sin u(0))$$

$$= \frac{\text{Arc}\sin u(x) - \text{Arc}\sin u(0)}{u(x)-u(0)} \cdot \frac{u(x)-u(0)}{x}$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\text{Arcsin}\, u(x) - \text{Arc}\sin u(0)}{u(x)-u(0)} = \lim_{\substack{X \to 1 \\ X<1}} \frac{\text{Arcsin}\, X - \frac{\pi}{2}}{X-1} = +\infty$$

ولدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{u(x)-u(0)}{x} = u'(0) = 1$$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0

ب– جدول تغيرات الدالة f

* لدينا f قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$

ليكن x عنصرا من $]-\infty, 0[$. لدينا

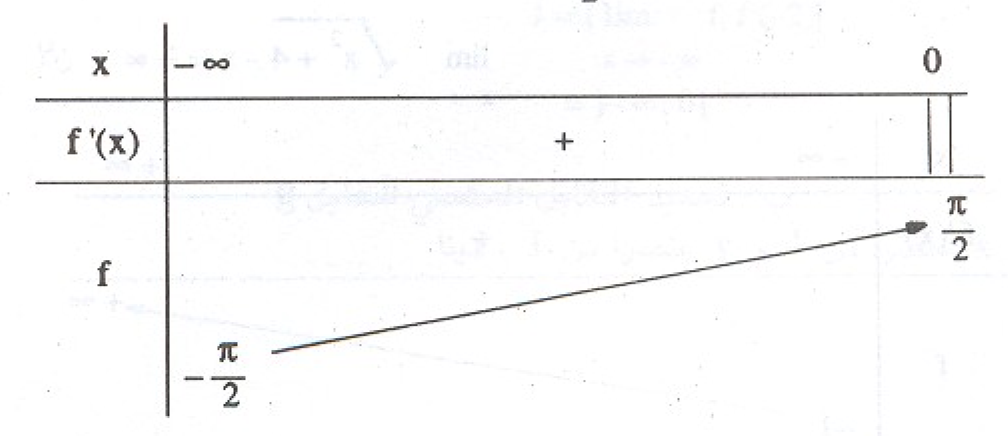
$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

وبما أن $u'(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$

إذن $\forall x \in]-\infty, 0[\quad f'(x) > 0$

* لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -1$ ومنه

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$



x	$-\infty$		0
f '(x)		+	‖
f	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

3- أ– الفروع اللانهائية للمنحنى (T)

* لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -1$

ومنه تقبل (T) مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$

* لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} - 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}$$

$$= 2$$

لكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا

$$u(x) - 2x = \sqrt{x^2+4} - x - 1$$

$$= \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} - 1$$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) - 2x = -1$

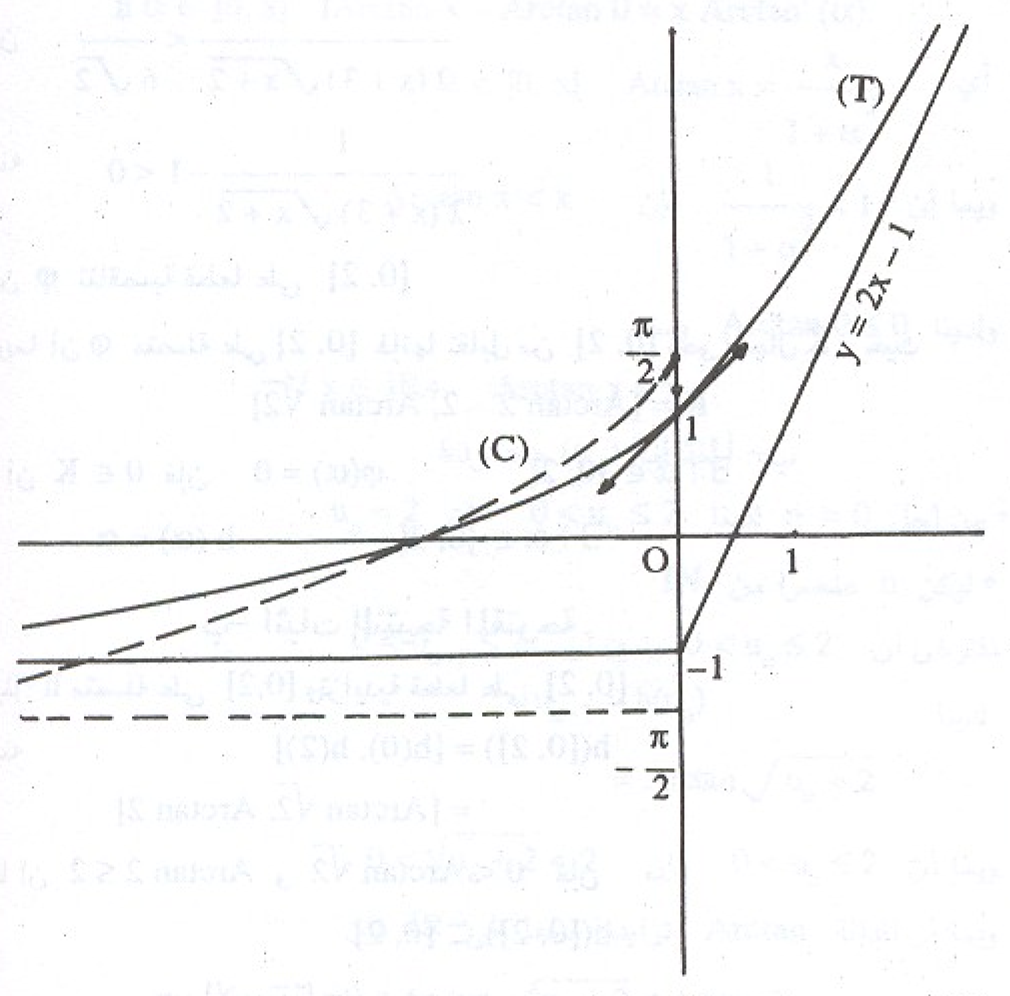
إذن (T) تقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 2x - 1$ بجوار $+\infty$

د– معادلة مماس (T) في A

لدينا $u(0) = 1$ و $u'(0) = 1$

ومنه معادلة مماس (T) في A هي $y = x + 1$

ج– انشا ء المنحنيين (T) و (C)



ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$u(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+4} - 2$$

ومنه $\forall x \in IR \quad u(x) \ge x+1$

إذن (T) توجد فوق مماسها عند A

* * * *

11

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = x - \sqrt{1-x^2}\,\text{Arcsin}\,x$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن f فردية

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ب- حدد الدالة المشتقة للدالة f

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

3- بين أن f تقابل من D نحو مجال I يجب تحديده

4- انشئ منحنى f و f^{-1} في نفس المعلم المتعامد المنظم.

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

إذن $D = [-1, 1]$

ب- الدالة f فردية

ليكن x عنصرا من $[-1, 1]$

لدينا $-x \in [-1, 1]$

ولدينا

$$f(-x) = -x - \sqrt{1-(-x)^2}\,\text{Arcsin}(-x)$$
$$= -x - \sqrt{1-x^2}\,(-\text{Arcsin}\,x)$$
$$= -(x - \sqrt{1-x^2}\,\text{Arcsin}\,x)$$
$$= -f(x)$$

إذن الدالة f فردية

2-أ- قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$

لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\,\text{Arcsin}\,x - 1}{x-1}$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}\,\text{Arcsin}\,x$$
$$= 1 + \sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}}\,\text{Arcsin}\,x$$
$$= 1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\text{Arcsin}\,x$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \text{Arcsin}\,x = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

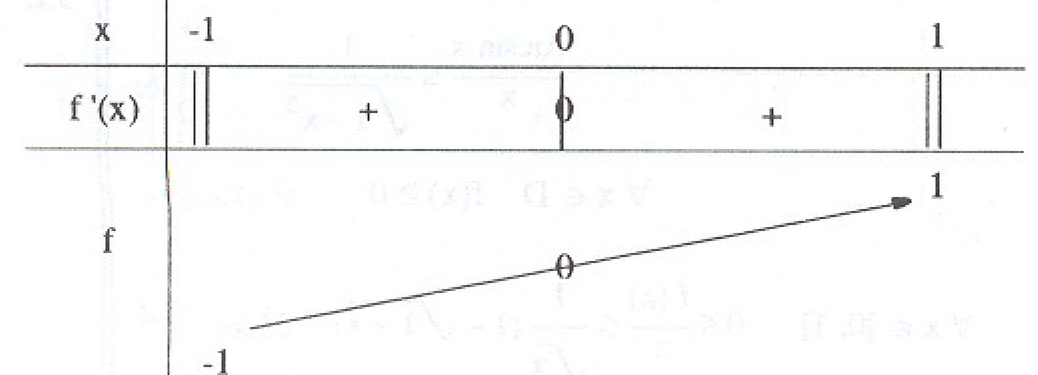
ب- تحديد الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$ لدينا

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arcsin}\,x - \sqrt{1-x^2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arcsin}\,x$$

إذن $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arcsin}\,x \quad \forall x \in]-1, 1[$

ج- جدول تغيرات الدالة f



x	-1		0		1
f '(x)	‖	+	0	+	‖
f	-1	↗	0	↗	1

3- الدالة f تقابل

لدينا f متصلة على $[-1, 1]$

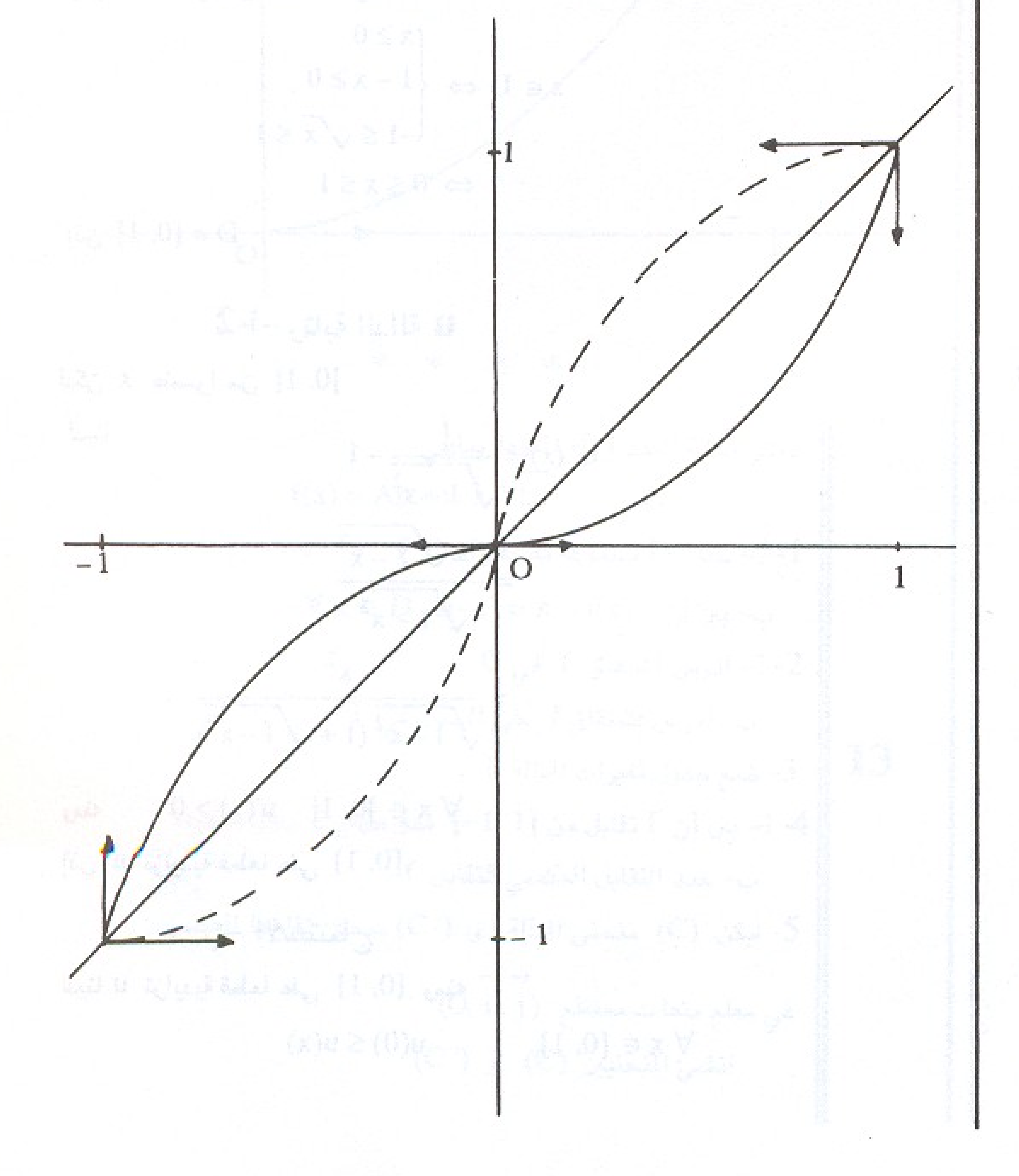
f تزايدية قطعا على $[-1, 1]$

ومنه f تقابل من $[-1, 1]$ نحو المجال I حيث

$$I = [f(-1)\,,\,f(1)] = [-1, 1]$$

إذن f تقابل من $[-1, 1]$ نحو $[-1, 1]$

4- انشاء المنحنيين



12

تعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}\,\text{Arcsin}\sqrt{x}$$

1- حدد D حيز تعريف الدالة f

2- لتكن u الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad u(x) = \text{Arcsin}\, x - x$$

أ- بين أن الدالة u تزايدية على [0, 1]

ب- استنتج أن $\text{Arcsin}\, x \geq x \qquad \forall x \in [0, 1]$

ج- بين أن $f(x) \leq \sqrt{x}\,(1 - \sqrt{1-x}) \qquad \forall x \in [0, 1]$

3- أ- ليكن x عنصرا من]0, 1[

بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة Arcsin في المجال [0, x]

بين أن $\dfrac{\text{Arcsin}\, x}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ب- استنتج أن $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in D$

4- أ- بين أن $0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{1-x}) \qquad \forall x \in]0, 1]$

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x)}{x}$ ماهو التأويل الهندسي لهذه النتيجة ؟

5- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1

6- أ- ادرس تغيرات الدالة f

ب- انشئ المنحنى الممثل للدالة f .

1- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

إذن $D = [0, 1]$

2-أ- رتابة الدالة u

ليكن x عنصرا من]0, 1[

لدينا

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1 + \sqrt{1-x^2})}$$

ومنه $\forall x \in]0, 1[\qquad u'(x) > 0$

إذن u تزايدية قطعا على [0, 1]

ب- الاستنتاج

لدينا u تزايدية قطعا على [0, 1] ومنه

$$\forall x \in [0, 1] \qquad u(0) \leq u(x)$$

أي $0 \leq u(x) \qquad \forall x \in [0, 1]$

بمعنى أن $x \leq \text{Arcsin}\, x \qquad x \in [0, 1]$

ج- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من [0, 1]

لدينا $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ وحسب السؤال السابق لدينا

$$\sqrt{x} \leq \text{Arcsin}\sqrt{x}$$

ومنه

$$\sqrt{1-x}\,.\,\sqrt{x} \leq \sqrt{1-x}\,\text{Arcsin}\sqrt{x}$$

أي

$$-\sqrt{1-x}\,\text{Arcsin}\sqrt{x} \leq -\sqrt{x}\sqrt{1-x}$$

ومنه

$$\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\,\text{Arcsin}\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\,(1 - \sqrt{1-x})$$

أي

$$f(x) \leq \sqrt{x}\,(1 - \sqrt{1-x})$$

إذن

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) \leq \sqrt{x}\,(1 - \sqrt{1-x})$$

3-أ- اثبات المتفاوتة المقترحة

لدينا Arcsin متصلة على [0, x] وقابلة للاشتقاق على]0, x[وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists \alpha \in]0, x[\quad \text{Arcsin}\, x - \text{Arcsin}\ 0 = x.\ \text{Arcsin}'(\alpha)$$

أي

$$\exists \alpha \in]0, x[\quad \text{Arcsin}\, x = x.\ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

لدينا $\alpha < x$ ومنه $1 - x^2 < 1 - \alpha^2$ أي $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-\alpha^2}$

بمعنى أن

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن $\dfrac{x}{\sqrt{1-\alpha^2}} < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ أي $\text{Arcsin}\, x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ومنه

$$\frac{\text{Arcsin}\, x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من]0, 1[

لدينا $0 < \sqrt{x} < 1$ وحسب السؤال السابق لدينا

$$\frac{\text{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

أي

$$\sqrt{1-x}\,\text{Arcsin}\sqrt{x} - \sqrt{x} \leq 0$$

بمعنى أن $f(x) \geq 0$

لدينا $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ ومنه

$$(\forall x \in D) \quad f(x) \geq 0$$

4-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من [0, 1]

لدينا حسب السؤال الثاني الجزء ج منه وحسب السؤال السابق

$$0 \le f(x) \le \sqrt{x}\,(1-\sqrt{1-x})$$

ومنه $$0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{\sqrt{x}}{x}\,(1-\sqrt{1-x})$$

أي $$0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}\,(1-\sqrt{1-x})$$

إذن $$\forall x \in \,]0,1] \quad 0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}\,(1-\sqrt{1-x})$$

ب- حساب النهاية المقترحة

لدينا $$\forall x \in \,]0,1] \quad 0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}\,(1-\sqrt{1-x})$$

ولدينا $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}$$

$$= 0$$

إذن $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = 0$$

التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

لدينا $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

ومنه $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

وهذا يعني أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ولدينا $f'_d(0) = 0$

إذن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس في النقطة $O(0,0)$ معادلته $y = 0$

5- قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]0,1[$. لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{1-x}}\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x}$$

لدينا $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \text{Arcsin}\,\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$$

ولدينا $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\frac{1}{1-x}} = +\infty$$

ومنه $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

6-أ- تغيرات الدالة f

* ليكن x عنصرا من $]0,1[$. لدينا

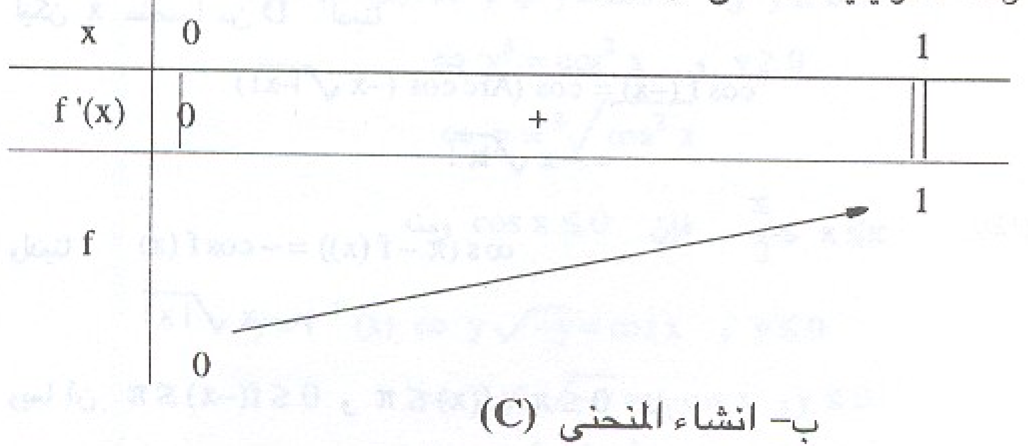
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\,.\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x}$$

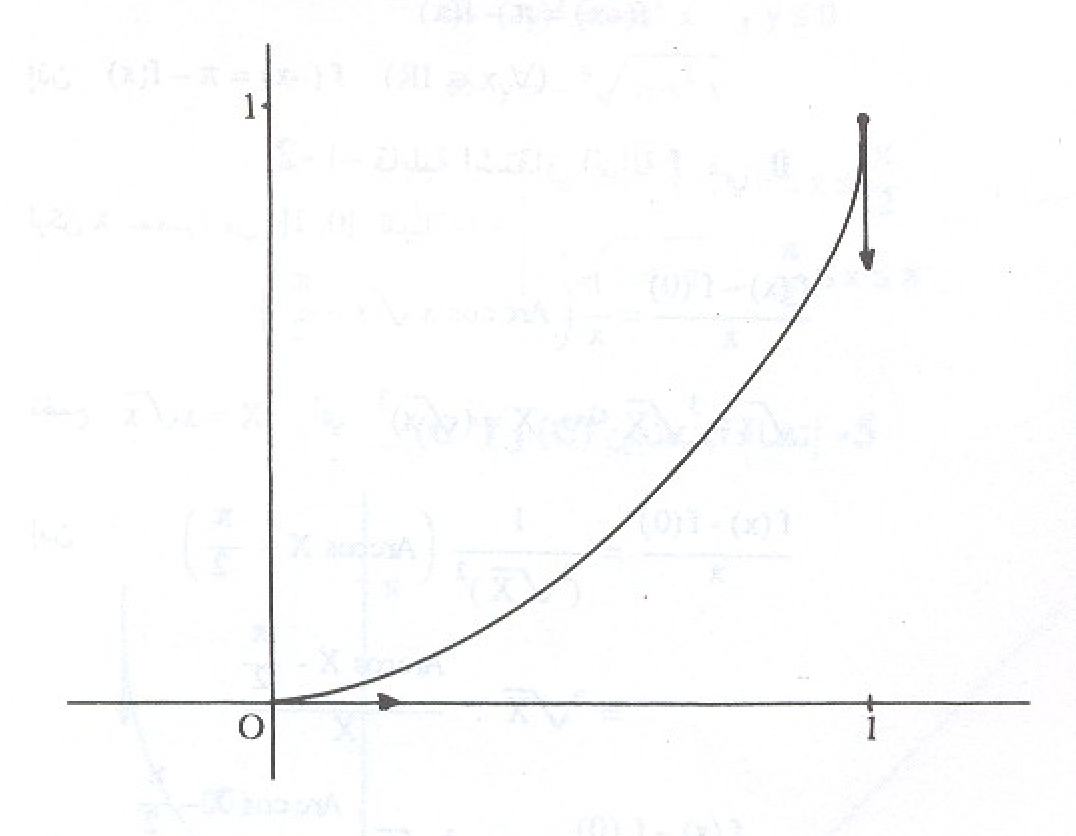
لدينا $\sqrt{x} > 0$ ومنه $\text{Arcsin}\,\sqrt{x} > 0$

إذن $f'(x) > 0$

ومنه f تزايدية قطعا على $[0,1]$



ب- انشاء المنحنى (C)



* * * *

13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = \text{Arccos}\,x\,\sqrt{|x|}$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن $\forall x \in D \quad f(-x) = \pi - f(x)$

2- أ- ادرس اشتقاق f في 0

ب- ادرس اشتقاق f على اليسار في 1

3- ضع جدول تغيرات الدالة f .

4- أ- بين أن f تقابل من $[-1,1]$ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل f .

5- ليكن (C) منحنى الدالة f و (C ') منحنى تقابلها العكسي

في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

انشئ المنحنيين (C) و (C ')

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow -1 \le x\sqrt{|x|} \le 1$$
$$\Leftrightarrow |x\sqrt{|x|}| \le 1$$
$$\Leftrightarrow x^2|x| \le 1$$
$$\Leftrightarrow |x|^3 \le 1$$
$$\Leftrightarrow |x| \le 1$$
$$\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

إذن $D = [-1, 1]$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$\cos f(-x) = \cos(\text{Arc}\cos(-x\sqrt{|-x|})) = -x\sqrt{|x|}$$

ولدينا

$$\cos(\pi - f(x)) = -\cos f(x) = -x\sqrt{|x|}$$

وبما أن $0 \le f(-x) \le \pi$ و $0 \le \pi - f(x) \le \pi$ فإن

$$f(-x) = \pi - f(x)$$

إذن $(\forall x \in IR) \quad f(-x) = \pi - f(x)$

2- أ- قابلية اشتقاق الدالة f في 0

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\text{Arc}\cos x\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right)$$

نضع $X = x\sqrt{x}$ أي $X = (\sqrt{x})^3$ ومنه $\sqrt{x} = \sqrt[3]{X}$

إذن

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{X})^2}\left(\text{Arc}\cos X - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{X} \cdot \frac{\text{Arc}\cos X - \frac{\pi}{2}}{X}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \sqrt[3]{X} \cdot \frac{\text{Arc}\cos X - \frac{\pi}{2}}{X}$$

ولدينا

$$\lim_{X \to 0} \frac{\text{Arc}\cos X - \frac{\pi}{2}}{X} = \lim_{X \to 0} \frac{\text{Arc}\cos X - \text{Arc}\cos 0}{X} = \frac{-1}{\sqrt{1-0^2}} = -1$$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\pi - f(-x) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

لأن $\forall x \in IR \quad f(-x) = \pi - f(x)$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(-x) - \frac{\pi}{2}}{-x} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \frac{f(X) - \frac{\pi}{2}}{X} = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا $f'(0) = 0$

ب- قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}(\text{Arc}\cos x\sqrt{x} - \text{Arc}\cos 1) = \frac{\text{Arc}\cos x\sqrt{x}}{x-1}$$

نضع $X = x\sqrt{x}$ ومنه $x = (\sqrt[3]{X})^2$

إذن

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\text{Arc}\cos X}{(\sqrt[3]{X})^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{X}+1} \cdot \frac{\text{Arc}\cos X}{\sqrt[3]{X}-1}$$

لدينا

$$X - 1 = (\sqrt[3]{X})^3 - 1 = (\sqrt[3]{X} - 1)((\sqrt[3]{X})^2 + \sqrt[3]{X} + 1)$$

ومنه

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(\sqrt[3]{X})^2 + \sqrt[3]{X} + 1}{\sqrt[3]{X}+1} \cdot \frac{\text{Arc}\cos X}{X-1}$$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{X \to 1 \\ X<1}} \frac{(\sqrt[3]{X})^2 + \sqrt[3]{X} + 1}{\sqrt[3]{X}+1} \cdot \frac{\text{Arc}\cos X}{X-1}$$

بما أن

$$\lim_{\substack{X \to 1 \\ X<1}} \frac{(\sqrt[3]{X})^2 + \sqrt[3]{X} + 1}{\sqrt[3]{X}+1} = \frac{3}{2}$$

وأن

$$\lim_{\substack{X \to 1 \\ X<1}} \frac{\text{Arc}\cos X}{X-1} = -\infty$$

فإن

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

3- جدول تغيرات الدالة f

* لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{X \to 1 \\ X<1}} \text{Arc}\cos X = 0$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{X \to -1 \\ X > -1}} \text{Arc}\cos X$

$= \pi$

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$ لدينا

$$f(x) = \text{Arccos}\, u(x)$$

حيث u دالة عددية معرفة بمايلي

$$\forall x \in]0, 1[\quad u(x) = x\sqrt{x}$$

ومنه $f'(x) = u'(x) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$

ولدينا $u'(x) = \sqrt{x} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

إذن $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^3}}$

ومنه $\forall x \in]0, 1[\quad f'(x) < 0$

ليكن x عنصرا من $]-1, 0[$ لدينا

$$f(-x) = \pi - f(x)$$

ومنه $-f'(-x) = -f'(x)$

أي $f'(x) = f'(-x)$

وبما أن $-x > 0$ فإن $f'(-x) < 0$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن $\forall x \in]-1, 0[\quad f'(x) < 0$

x	-1		0		1
f '(x)	‖	−	0	−	‖
f	π	↘			0

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{\pi - f(-x) - \pi}{x + 1}$

$= \lim\limits_{\substack{X \to 1 \\ X < 1}} \dfrac{f(X)}{-X + 1}$

$= \lim\limits_{\substack{X \to 1 \\ X < 1}} -\dfrac{f(X) - f(1)}{X - 1}$

$= +\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -1.

4-أ- الدالة f تقابل

- لدينا f متصلة على $[-1, 1]$ لأنها مركب دالتين متصلتين
- لدينا f تناقصية قطعا على $[-1, 1]$

ومنه f تقابل من $[-1, 1]$ نحو المجال I حيث

$I = [f(1), f(-1)]$
$= [0, \pi]$

ب- تحديد التقابل العكسي

ليكن x عنصرا من $[0, x]$ و y عنصرا من $[-1, 1]$. لدينا

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

$\Leftrightarrow x = \text{Arc}\cos y\sqrt{|y|}$

$\Leftrightarrow y\sqrt{|y|} = \cos x$

إذا كان $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ فإن $\cos x \ge 0$ ومنه

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow y\sqrt{y} = \cos x$ و $y \ge 0$

$\Leftrightarrow y^3 = \cos^2 x$ و $y \ge 0$

$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\cos^2 x}$

إذاكان $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$ فإن $\cos x \le 0$ ومنه

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow y\sqrt{-y} = \cos x$ و $y \le 0$

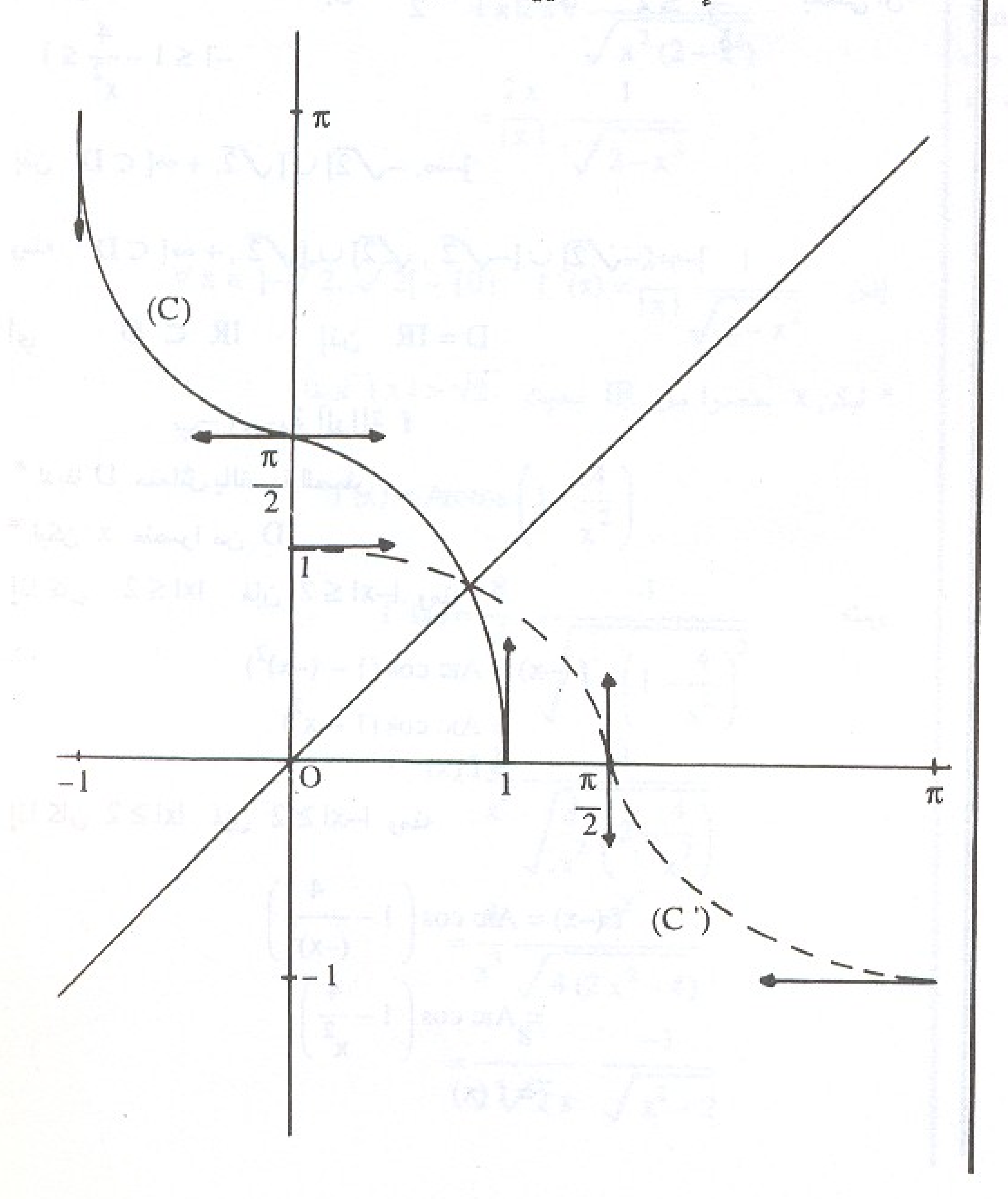
$\Leftrightarrow (-y)\sqrt{-y} = -\cos x$ و $y \le 0$

$\Leftrightarrow (-y)^3 = \cos^2 x$ و $y \le 0$

$\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{\cos^2 x}$

إذن
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\cos^2 x} & ; \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\sqrt[3]{\cos^2 x} & ; \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

5- إنشاء المنحنيين (C) و (C ')



14

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \begin{cases} \text{Arc}\cos(1-x^2) & ; \ |x| \leq \sqrt{2} \\ \text{Arc}\cos\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right) & ; \ |x| \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن f زوجية

ج- حدد نهاية f عند $+\infty$

2- أ- ادرس اتصال الدالة f في $\sqrt{2}$

ب- ادرس اشتقاق f في $\sqrt{2}$

3- أ- ادرس قابلية اشتقاق f في 0

ب- حدد الدالة المشتقة للدالة f

4- ليكن g قصور الدالة f على $[\sqrt{2}, +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[\sqrt{2}, +\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد g^{-1} التقابل العكسي للتقابل g

5- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

أ- حدد معادلة نصفي مماس (C) في النقطة O

ب- انشئ المنحنى (C)

ج- انشئ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم

1- أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR

إذا كان $|x| \leq \sqrt{2}$ فإن $x^2 \leq 2$ ومنه $-1 \leq 1-x^2 \leq 1$

إذن $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\subset D$

إذا كان $|x| \geq \sqrt{2}$ فإن $\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ أي $\dfrac{4}{x^2} \leq 2$ بمعنى أن

$$-1 \leq 1 - \frac{4}{x^2} \leq 1$$

إذن $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[\subset D$

ومنه $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[\subset D$

أي $IR \subset D$ إذن $D = IR$

ب- زوجية الدالة f

* لدينا D متماثل بالنسبة للصفر

* ليكن x عنصرا من D

إذا كان $|x| \leq 2$ فإن $|-x| \leq 2$ ومنه

$$\begin{aligned} f(-x) &= \text{Arc}\cos(1-(-x)^2) \\ &= \text{Arc}\cos(1-x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذا كان $|x| \geq 2$ فإن $|-x| \geq 2$ ومنه

$$\begin{aligned} f(-x) &= \text{Arc}\cos\left(1-\frac{4}{(-x)^2}\right) \\ &= \text{Arc}\cos\left(1-\frac{4}{x^2}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن $\forall x \in IR \quad f(-x) = f(x)$

* وبالتالي فإن f زوجية

ج- نهاية الدالة f عند ∞ +

ليكن x عنصرا من $]\sqrt{2}, +\infty[$ لدينا

$$f(x) = \text{Arc}\cos\left(1-\frac{4}{x^2}\right)$$

ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{4}{x^2} = 1$

ومنه

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \text{Arc}\cos 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2-أ- اتصال الدالة f في √2

لدينا $\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[\qquad f(x) = \text{Arc}\cos\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)$

$\forall x \in [0, \sqrt{2}] \qquad f(x) = \text{Arc}\cos(1-x^2)$

لدينا $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} 1 - \dfrac{4}{x^2} = -1$

ومنه

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} f(x) &= \text{Arc}\cos(-1) \\ &= \pi \\ &= f(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

لدينا $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} 1 - x^2 = -1$ ومنه

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} f(x) &= \text{Arc}\cos(-1) \\ &= \pi \\ &= f(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

إذن f متصلة في $\sqrt{2}$

ب- اشتقاق الدالة f في √2

* ليكن x عنصرا من $]0, \sqrt{2}[$ لدينا :

$$\frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \frac{\text{Arc}\cos(1-x^2) - \pi}{x - \sqrt{2}}$$

نضع $X = 1 - x^2$ ومنه $x = \sqrt{1-X}$

إذن

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} &= \frac{\text{Arc}\cos X - \pi}{\sqrt{1-X} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\text{Arc}\cos X - \pi}{-X-1}(\sqrt{1-X} + \sqrt{2}) \\ &= -(\sqrt{1-X} + \sqrt{2}) \cdot \frac{\text{Arc}\cos X - \pi}{X+1} \end{aligned}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x<\sqrt{2}}} \frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{\substack{X \to -1 \\ X>-1}} -(\sqrt{1-X}+\sqrt{2})\frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{X+1}$$
$$= +\infty$$

لأن
$$\lim_{\substack{X \to -1 \\ X>-1}} -(\sqrt{1-X}+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$
$$\lim_{\substack{X \to -1 \\ X>-1}} \frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{X+1} = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في $\sqrt{2}$

* ليكن x عنصرا من $]\sqrt{2}, +\infty[$ لدينا
$$\frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \frac{1}{x-\sqrt{2}}\left(\operatorname{Arc}\cos\left(1-\frac{4}{x^2}\right)-\pi\right)$$

نضع $X = 1-\frac{4}{x^2}$ ومنه $x = \frac{2}{\sqrt{1-X}}$ إذن
$$\frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{\frac{2}{\sqrt{1-X}}-\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{\sqrt{2}-\sqrt{1-X}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{1-X}) \cdot \frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{1+X}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x>\sqrt{2}}} \frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{\substack{X \to -1 \\ X>-1}} \frac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{1-X})\frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{X+1}$$
$$= -\infty$$

لأن
$$\lim_{\substack{X \to -1 \\ X>-1}} \frac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{1-X}) = 2\sqrt{2}$$
$$\lim_{\substack{X \to -1 \\ X>-1}} \frac{\operatorname{Arc}\cos X-\pi}{X+1} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $\sqrt{2}$

3-أ- قابلية اشتقاق f في 0

ليكن x عنصرا من $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ يخالف 0 . لدينا
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\operatorname{Arc}\cos(1-x^2)-\operatorname{Arc}\cos 1}{x}$$
$$= \frac{\operatorname{Arc}\cos(1-x^2)}{x}$$

نضع $\alpha = \operatorname{Arc}\cos(1-x^2)$ $(0 \le \alpha \le \pi)$ ومنه

ومنه $1-x^2 = \cos\alpha$ أي $x^2 = 1-\cos\alpha$

إذا كان $x>0$ فإن $x = \sqrt{1-\cos\alpha}$

إذا كان $x<0$ فإن $x = -\sqrt{1-\cos\alpha}$

ومنه إذا كان $x>0$ فإن $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$

إذا كان $x<0$ فإن $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha>0}} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$$
$$= \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha>0}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\cos\alpha}}$$

وبما أن $\lim_{\alpha \to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$ فإن
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{2}$$

وبالمثل لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\sqrt{2}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0

ب- الدالة المشتقة للدالة f

* ليكن x عنصرا من $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[-\{0\}$ لدينا
$$f(x) = \operatorname{Arccos}(1-x^2)$$

ومنه
$$f'(x) = -2x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$$
$$= -2x \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2(2-x^2)}}$$
$$= \frac{2x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

إذن
$$\forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[-\{0\} \quad f'(x) = \frac{2x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

* ليكن x عنصرا من IR بحيث $|x| > \sqrt{2}$ لدينا
$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)$$

ومنه
$$f'(x) = \frac{8}{x^3} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^2}}$$
$$= \frac{8}{x^3} \frac{-1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{8}{x^3} \frac{-x^2}{\sqrt{4(2x^2-4)}}$$
$$= \frac{8}{2\sqrt{2}x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{x\sqrt{x^2-2}}$$

إذن مهما يكن x من $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ فإن

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{2}}{x\sqrt{x^2-2}}$$

4- أ- التقابل g

لدينا g متصلة على $[\sqrt{2}, +\infty[$

ولدينا $\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[\quad f'(x) = \frac{-2\sqrt{2}}{x\sqrt{x^2-2}}$

ومنه g تناقصية قطعا على $]\sqrt{2}, +\infty[$

إذن g تقابل من $]\sqrt{2}, +\infty[$ نحو المجال I حيث

$$I =]\lim_{x \to +\infty} g \, , f(\sqrt{2})]$$
$$=]0, \pi]$$

ب- تحديد التقابل العكسي

ليكن x عنصرا من $]0, \pi]$ و y عنصرا من $]\sqrt{2}, +\infty[$ لدينا :

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \text{Arc}\cos\left(1 - \frac{4}{y^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{4}{y^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{y^2} = 1 - \cos x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{1-\cos x}}$$

إذن $\forall x \in]0, \pi] \quad g^{-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\cos x}}$

5- أ- معادلتا نصفي مماس (C) في O

لدينا $f'_d(0) = \sqrt{2}$ و $f'_g(0) = -\sqrt{2}$ و $f(0) = 0$

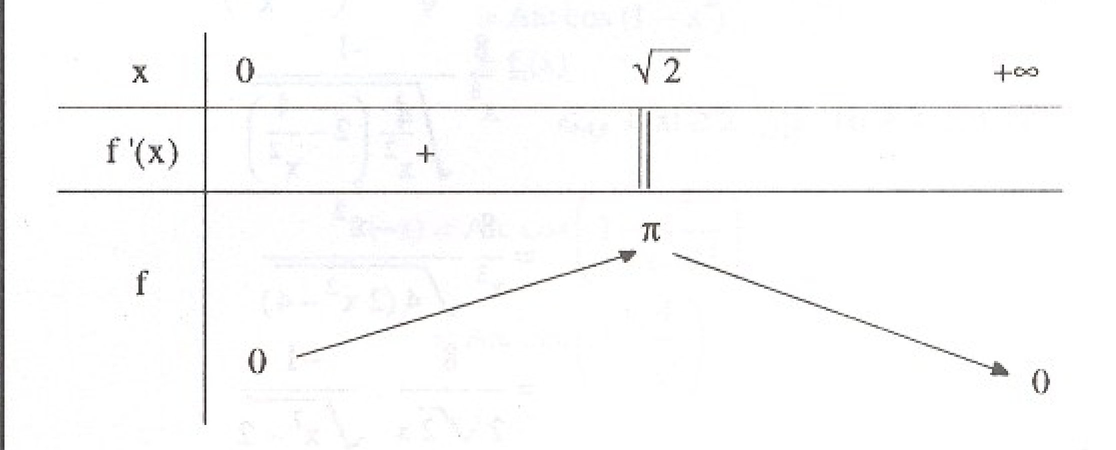
(أنظر السؤال الثالث الجزء أ منه)

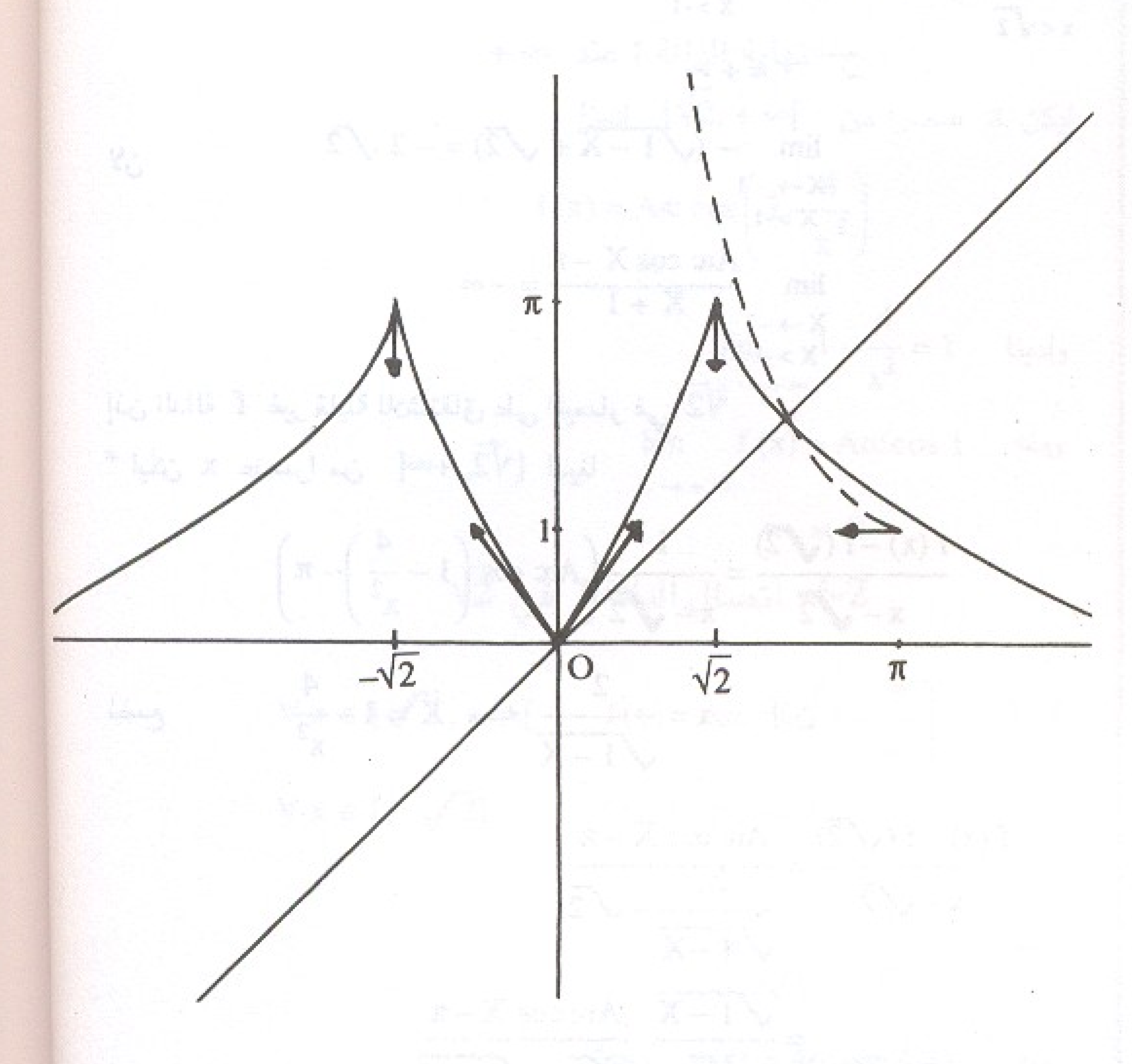
ومنه معادلتا نصفي مماسي (C) في O هما :

$$y = \sqrt{2}\,x \quad \text{و} \quad y = -\sqrt{2}\,x$$

ب- انشاء منحنى الدالة f

بما أن الدالة f زوجية فإنه يكفي انشاء الجزء منها الموافق للقيم الموجبة حسب السؤال الثالث الجزء ب منه يكون لدينا





ج- انشاء منحنى الدالة العكسية

لدينا منحنيي الدالتين g و g^{-1} متماثلتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$

(لإنشاء منحنى g^{-1} أنظر الشكل السابق).

* * * *

15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = \text{Arc}\cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \text{Arctan}\, x$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0

3- أ- حدد الدالة المشتقة للدالة f

ب- استنتج أن

$$f(x) = \begin{cases} \text{Arctan}\, x \ ; & x \geq 0 \\ -3\,\text{Arctan}\, x \ ; & x \leq 0 \end{cases}$$

4- انشئ المنحنى (C)

1- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 \leq x^2 \\ -1 \leq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in \text{IR}$$

إذن $D = IR$

2- قابلية اشتقاق f في 0

ليكن x عنصرا من $IR - \{0\}$. لدينا

$$f(x) - f(0) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \operatorname{Arctan} x$$

لأن $f(0) = \operatorname{Arccos} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = 0$

ومنه

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} - \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$$

ولدينا

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\tan \alpha} = 1$$

نضع $\alpha = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ $(0 \le \alpha \le \pi)$ ومنه

$$\cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ أي } x^2 = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$$

إذا كان $x > 0$ فإن $x = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}$ ومنه

$$\frac{1}{x}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} \cdot \alpha = \sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\cos \alpha}(1+\cos \alpha)}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\cos \alpha}(1+\cos \alpha)}$$

ولدينا

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1-\cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\cos \alpha) = 2$$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} -\frac{1}{X}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-X^2}{1+X^2}\right) = -2$$

إذن

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -3$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق في 0

3- أ- تحديد الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من IR يخالف 0 . لدينا

$$f(x) = \operatorname{Arccos} u(x) - \operatorname{Arctan} x$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بمايلي

$$u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

ومنه

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-u^2(x)}} - \frac{1}{1+x^2}$$

لدينا

$$u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - 1$$

ومنه

$$u'(x) = -\frac{2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

ولدينا

$$1 - u^2(x) = 1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

ومنه

$$\sqrt{1-u^2(x)} = \frac{2|x|}{1+x^2}$$

إذن

$$f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{2|x|} - \frac{1}{1+x^2} = \left(\frac{2x}{|x|} - 1\right)\frac{1}{1+x^2}$$

وبالتالي

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{|x|} - 1\right)\frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in IR - \{0\}$$

ب- الاستنتاج

حسب السؤال السابق لدينا

$$\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in IR_-^* \quad f'(x) = \frac{-3}{1+x^2}$$

ليكن g قصور الدالة f على IR_+^* لدينا

$$\forall x \in IR_+^* \quad g'(x) = \operatorname{Arctan}'(x)$$

ومنه

$$(\exists \alpha \in IR) \; (\forall x \in IR_+^*) \quad g(x) = \operatorname{Arctan} x + \alpha$$

لدينا

$$g(1) = \operatorname{Arccos} 0 - \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ومنه $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\alpha$ أي $\alpha=0$

إذن $g(x)=\text{Arctan } x \qquad \forall x\in IR_-^*$

لتكن h قصور الدالة f على IR_-^* . لدينا

$$h'(x)=-3\ \text{Arctan}'(x) \qquad \forall x\in IR_-^*$$

ومنه $h(x)=-3\ \text{Arctan } x+\alpha \qquad (\exists\, \alpha\in IR)(\forall x\in IR_-^*)$

ولدينا
$$h(-1)=\text{Arc cos } 0-\text{Arctan}(-1)$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{3\pi}{4}$$

ومنه $\frac{3\pi}{4}=-3\ \text{Arctan}(-1)+\alpha$

أي $\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+\alpha$ أي $\alpha=0$

إذن $h(x)=-3\ \text{Arctan } x \qquad \forall x\in IR_-^*$

ومنه
$$f(x)=\begin{cases}\text{Arctan } x\ ; & x>0\\ -3\ \text{Arctan } x\ ; & x<0\end{cases}$$

وبما أن $f(0)=0$ و $\text{Arctan } 0=0$ فإن
$$f(x)=\begin{cases}\text{Arctan } x\ ; & x\geq 0\\ -3\ \text{Arctan } x\ ; & x\leq 0\end{cases}$$

4- انشاء المنحنى (C)

المنحنى (C) مكون من جزءين : الجزء الأول الموافق للقيم الموجبة هو جزء من منحنى الدالة Arctan والجزء الثاني الموافق للقيم السالبة هو جزء من منحنى الدالة

$$x\longmapsto -3\ \text{Arctan } x$$

نعتبر الدالة العددية u المعرفة بمايلي

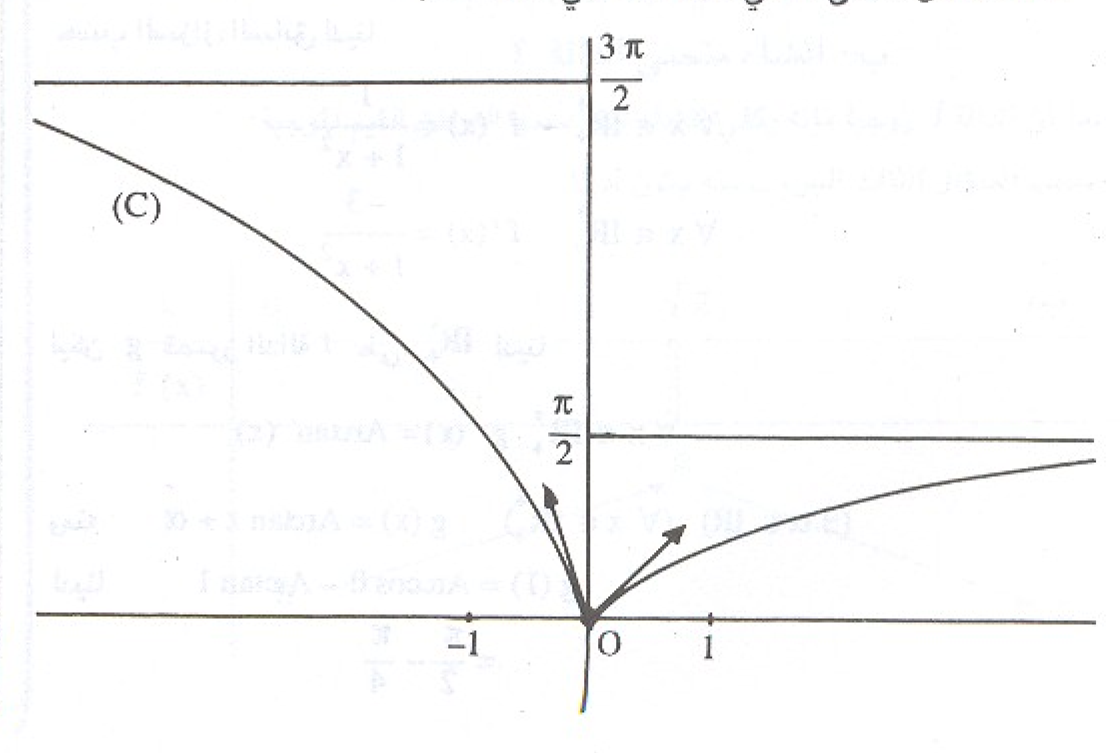
$$u(x)=-3\ \text{Arctan } x$$

الدالة u تناقصية قطعا على IR و u فردية

لدينا $\lim_{x\to-\infty} u(x)=\frac{3\pi}{2}$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\text{Arctan } x=-\frac{\pi}{2}$

الدالة u قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا $u'(0)=-3$

معادلة مماس منحنى u في النقطة O هي $y=-3x$



16

نعتبر الدالتين العدديتين u و f المعرفتين بمايلي

$$u(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$
$$f(x)=\text{Arccos } u(x)$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة u

ب- بين أن $u(x)-u(-x)=\sqrt{3}\,x \quad (\forall x\in D)$

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق u على اليسار في 1

ب- استنتج قابلية اشتقاق u على اليمين في -1

3- أ- حدد u' الدالة المشتقة للدالة u

ب- ضع جدول تغيرات الدالة u

ج- بين أنه مهما يكن من $]-1,1[$ فإن

$$\sqrt{1-u^2(x)}=\sqrt{1-x^2}\,|u'(x)|$$

4- أ- حدد E مجموعة تعريف الدالة f

ب- ادرس قابلية اشتقاق f في $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في -1 وعلى اليسار في 1

د- حدد الدالة المشتقة للدالة f

هـ- استنتج أن

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+\text{Arccos } x\ ; & -\frac{\sqrt{3}}{2}\leq x\leq 1\\ \frac{4\pi}{3}+\text{Arcsin } x\ ; & -1\leq x\leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

5- ليكن g قصور الدالة f على $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

أ- بين أن g تقابل من $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد g^{-1} التقابل العكسي للتقابل g

6- انشئ منحنيي الدالتين f و g^{-1} في معلم متعامد ممنظم.

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x\in D \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

إذن $D=[-1,1]$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$u(-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{1-(-x)^2}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

ولدينا $u(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

إذن $u(x)-u(-x)=\sqrt{3}\,x$

2- أ- قابلية اشتقاق u على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$ لدينا

$$\frac{u(x)-u(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{u(x)-u(1)}{x-1} = +\infty$

إذن u غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]-1, 0[$. لدينا

$$\frac{u(x)-u(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{3}\,x + u(-x) - (\sqrt{3}+u(1))}{x+1}$$

$$= \sqrt{3}\,.\,\frac{x-1}{x+1} + \frac{u(-x)-u(1)}{x+1}$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{u(-x)-u(1)}{x+1} = \lim_{\substack{X\to 1\\ X<1}} \frac{u(X)-u(1)}{-X+1}$$

$$= \lim_{\substack{X\to 1\\ X<1}} -\frac{u(X)-u(1)}{X-1}$$

$$= -\infty$$

وذلك حسب السؤال السابق.

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{u(x)-u(-1)}{x+1} = -\infty$

ومنه u غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -1.

3- أ- تحديد الدالة المشتقة للدالة u

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$.

لدينا

$$u'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,.\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن $\forall x \in\,]-1, 1[\quad u'(x) = \frac{1}{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

ب- جدول تغيرات الدالة u

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$. لدينا

$$u'(x) = \frac{1}{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ومنه إذا كان $x > 0$ فإن $u'(x) > 0$

نفترض أن $x \leq 0$. لدينا

$$u'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \geq -x$$

$$\Leftrightarrow 3(1-x^2) \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$u'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
u	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$. لدينا

$$1-u^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}(1-x^2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{4}(-2x^2 + 2\sqrt{3}\,.\sqrt{1-x^2} + 3)$$

$$= \frac{1}{4}(3(1-x^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} + x^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}+x)^2$$

ومنه $\sqrt{1-u^2(x)} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}+x\right|$

ولدينا $\sqrt{1-x^2}\,|u'(x)| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}+x\right|$

إذن $\sqrt{1-u^2(x)} = \sqrt{1-x^2}\,|u'(x)|$

4- أ- تحديد المجموعة E

ليكن x عنصرا من IR .

$$x \in E \Leftrightarrow (-1 \le u(x) \le 1 \quad \text{و} \quad 1-x^2 \ge 0)$$

حسب السؤال الثالث الجزء ب منه لدينا

$$\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \qquad -1 \le u(x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\forall x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \qquad -1 \le u(x) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $\forall x \in [-1, 1] \quad -1 \le u(x) \le 1$

إذن $x \in E \Leftrightarrow 1-x^2 \le 1$

$$\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

ومنه $E = [-1, 1]$

ج- قابلية اشتقاق f في $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ليكن x عنصرا من E يخالف $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ لدينا :

$$\frac{f(x)-f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{f(x) - \text{Arc}\cos(-1)}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\text{Arc}\cos u(x) - \pi}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

نضع $\alpha = \arccos x \quad (0 \le \alpha \le \pi)$ ومنه $x = \cos\alpha$

ولدينا $u(x) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\sin x$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$$

إذا كان $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن $\alpha < \frac{5\pi}{6}$ ومنه $\frac{\pi}{6} \le \alpha + \frac{\pi}{6} \le \pi$

ومنه $\text{Arccos}\, u(x) = \frac{\pi}{6} + \alpha$

إذن كان $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن

$$\frac{f(x)-f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\pi}{6}+\alpha-\pi}{\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\alpha - \frac{5\pi}{6}}{\cos\alpha - \cos\frac{5\pi}{6}}$$

ولدينا

$$\lim_{\alpha \to \frac{5\pi}{6}} \frac{\cos\alpha - \cos\frac{5\pi}{6}}{\alpha - \frac{5\pi}{6}} = \cos'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x > -\frac{\sqrt{3}}{2}}} \frac{f(x)-f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2$$

إذا كان $x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن $\alpha > \frac{5\pi}{6}$ ومنه $\frac{7\pi}{6} \le \alpha + \frac{\pi}{6} > \pi$

ومنه $0 < \alpha + \frac{\pi}{6} - \pi < \frac{\pi}{6}$

لدينا $u(x) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6} - \pi\right)$$

ومنه $\text{Arc}\cos(-u(x)) = \alpha + \frac{\pi}{6} - \pi$

أي $\pi - \text{Arccos}\, u(x) = \alpha + \frac{\pi}{6} - \pi$

ومنه $\text{Arc}\cos u(x) = 2\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

إذن إذا كان $x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن

$$\frac{f(x)-f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}}{\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{\alpha - \frac{5\pi}{6}}{\cos\alpha - \cos\frac{5\pi}{6}}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2}}} \frac{f(x)-f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= 2$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج- قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\text{Arc}\cos u(x) - \text{Arc}\cos u(1)}{x-1}$$

$$= \frac{\text{Arccos}\, u(x) - \text{Arccos}\, u(1)}{u(x)-u(1)} \cdot \frac{u(x)-u(1)}{x-1}$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{u(x)-u(1)}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Arccos}\, u(x) - \text{Arccos}\, u(1)}{u(x)-u(1)} = \lim_{\substack{X \to \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X < \frac{\sqrt{3}}{2}}} \frac{\text{Arc}\cos X - \text{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}}{X - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \text{Arc}\cos'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}$$

$$= -2$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

قابلية اشتقاق f على اليمين في 1-

ليكن x عنصرا من $]-1, 1]$. لدينا

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\text{Arc}\cos u(x) - \text{Arc}\cos(-1)}{u(x)-u(-1)} \cdot \frac{u(x)-u(-1)}{x+1}$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{u(x)-u(-1)}{x+1} = -\infty$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{\text{Arc}\cos u(x) - \text{Arc}\cos u(-1)}{u(x)-u(-1)} = \lim_{\substack{X \to -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ X < -\frac{\sqrt{3}}{2}}} \frac{\text{Arc}\cos X - \text{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{X+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \text{Arc}\cos'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -2$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1-.

د- تحديد الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[- \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ لدينا

$$f'(x) = u'(x)\,\frac{-1}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

حسب السؤال الثالث الجزء ج منه لدينا

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\,|u'(x)|}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{u'(x)}{|u'(x)|}$$

وحسب السؤال الثالث الجزء ب منه لدينا

$$\forall x \in \left]-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\quad u'(x) < 0$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[\quad u'(x) > 0$$

ومنه $\forall x \in \left]-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[\quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

هـ- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in \left]-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

أي $\forall x \in \left]-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\quad f'(x) = \text{Arc}\sin'(x)$

ومنه $\forall x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad f'(x) = \text{Arc}\sin(x) + \alpha$

وبما أن $f(-1) = \text{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ أي $f(-1) = \frac{5\pi}{6}$

وأن $\text{Arc}\sin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ فإن

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$$

إذن $\forall x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad f(x) = \frac{4\pi}{3} + \text{Arc}\sin x$

لدينا $\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[\quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

أي $\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[\quad f'(x) = \text{Arc}\cos'(x)$

ومنه $\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \quad f(x) = \text{Arc}\cos x + \alpha$

لدينا $f(1) = \text{Arc}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ أي $f(1) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا $\text{Arccos } 1 = 0$ ومنه $\alpha = \frac{\pi}{6}$

إذن $\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \quad f(x) = \frac{\pi}{6} + \text{Arc}\cos x$

وبالتالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \text{Arc}\cos x \ ; \ -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1 \\ \frac{4\pi}{3} + \text{Arc}\sin x \ ; \ -1 \le x \le -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

5- أ- التقابل g

لدينا g متصلة على $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

ولدينا g تناقصية قطعا على $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

ومنه g تقابل من $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ نحو المجال I حيث

$$I = \left[f(1), f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$$

إذن g تقابل من $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ نحو $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$

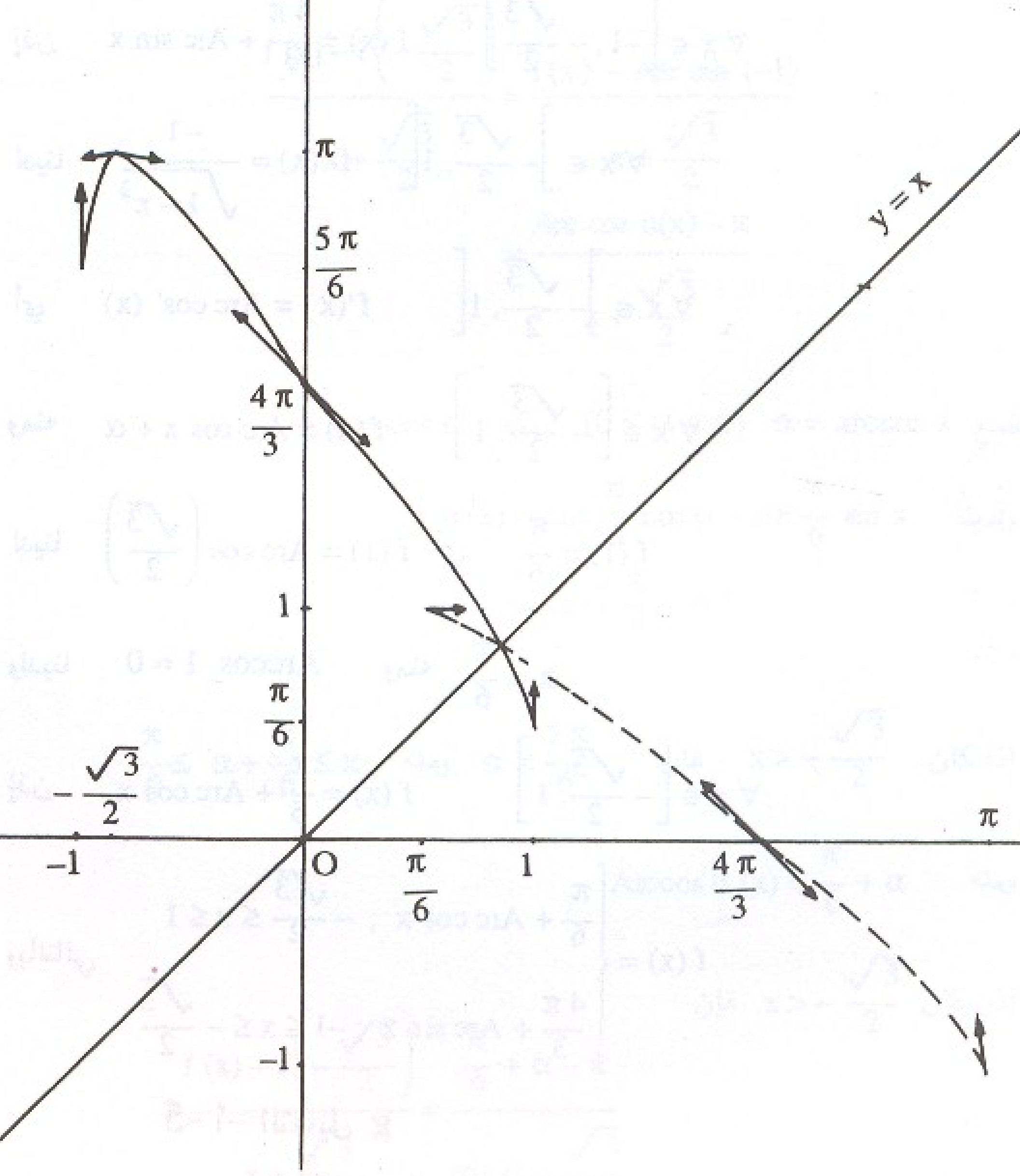
ب- تحديد التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ و y عنصرا من $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

لدينا
$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \text{Arc}\cos y$$
$$\Leftrightarrow \text{Arc}\cos y = x - \frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

إذن $g^{-1}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$

6- إنشاء المنحنيين



معادلتا نصفي مماسي المنحنى f في النقطة $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$ هما :

$$y = -2x + \sqrt{3} + \pi$$
$$y = 2x - \sqrt{3} + \pi$$

* * * *

17

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x) = \begin{cases} \text{Arc}\tan\sqrt{x^2 - 1} & ; |x| \geq 1 \\ \text{Arc}\sin\sqrt{1 - x^2} & ; |x| \leq 1 \end{cases}$$

1- أ- بين أن الدالة f زوجية

ب- احسب نهاية f عند $+\infty$

2- أ- ادرس اتصال وقابلية اشتقاق f في 1

ب- ادرس قابلية اشتقاق f في 0

3- أ- حدد الدالة المشتقة f' للدالة f

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- ادرس تقعر المنحنى (C)

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج- انشئ المنحنى (C)

5- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بمايلي

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = x\,\text{Arc}\cos x - \sqrt{1 - x^2}$$

بين أن g هي دالة أصلية للدالة f على $[0, 1]$.

1- أ- الدالة f زوجية

* مجموعة تعريف الدالة f هي IR (لأن $0 \leq \sqrt{1 - x^2} < 1$ إذا كان $|x| \leq 1$)

* ليكن x عنصرا من IR .

إذا كان $|x| \leq 1$ فإن $|-x| \leq 1$ ومنه

$$f(-x) = \text{Arc}\sin\sqrt{1 - (-x)^2}$$
$$= \text{Arc}\sin\sqrt{1 - x^2}$$
$$= f(x)$$

إذا كان $|x| \geq 1$ فإن $|-x| \geq 1$ ومنه

$$f(-x) = \text{Arctan}\sqrt{(-x)^2 - 1}$$
$$= \text{Arctan}\sqrt{x^2 - 1}$$
$$= f(x)$$

إذن $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in IR$

ومنه f دالة زوجية.

ب- نهاية الدالة f عند $+\infty$

لدينا
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\sqrt{x^2 - 1}$$
$$= \lim_{X \to 0} \text{Arctan}\, X$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

2- أ- اتصال الدالة f في 1

لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}$$
$$=\lim_{X\to 0} \operatorname{Arctan} X$$
$$=0$$
$$=f(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}$$
$$=\lim_{X\to 0} \operatorname{Arc\,sin} X$$
$$=0$$
$$=f(1)$$

إذن f متصلة في 1

قابلية اشتقاق f في 1

* ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$. لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$
$$=\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$
$$=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}\cdot\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{X\to 0}\frac{\operatorname{Arctan} X}{X}$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\tan\alpha}$$
$$=1$$

لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

* ليكن x عنصرا من $]-1,1[$. لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$
$$=\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$
$$=-\sqrt{\frac{1-x^2}{(x-1)^2}}\cdot\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{X\to 0}\frac{\operatorname{Arc\,sin} X}{X}$$
$$=1$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1+x}{1-x}=+\infty$$

إذن
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

* وبالتالي فإن f غير قابلة للاشتقاق في 1

ب- قابلية اشتقاق f في 0

ليكن x عنصرا من $[-1,1]-\{0\}$. لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1-x^2}-\operatorname{Arc\,sin} 1}{x}$$

نضع $\alpha=\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ ومنه $\left(0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha$ أي $x^2=\cos^2\alpha$

إذا $x>0$ فإن $x=\cos\alpha$ ومنه

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\alpha-\pi/2}{\cos\alpha}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\frac{\alpha-\pi/2}{\cos\alpha}$$
$$=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\frac{1}{\dfrac{\cos\alpha-\cos\pi/2}{\alpha-\pi/2}}$$
$$=\frac{1}{\cos'(\pi/2)}$$
$$=-1$$

إذا كان $x<0$ فإن $x=-\cos\alpha$ ومنه

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{\alpha-\pi/2}{\cos\alpha}$$

ومنه
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0 .

3- أ- تحديد الدالة المشتقة للدالة f

* ليكن x عنصرا من $]-1,1[-\{0\}$. لدينا

$$f(x)=\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$

ومنه
$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}$$
$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{|x|}$$

إذن $\forall x \in]-1, 1[-\{0\}$ $\quad f'(x) = \frac{-x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

* ليكن x عنصرا من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ لدينا

$$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{x^2-1}$$

ومنه

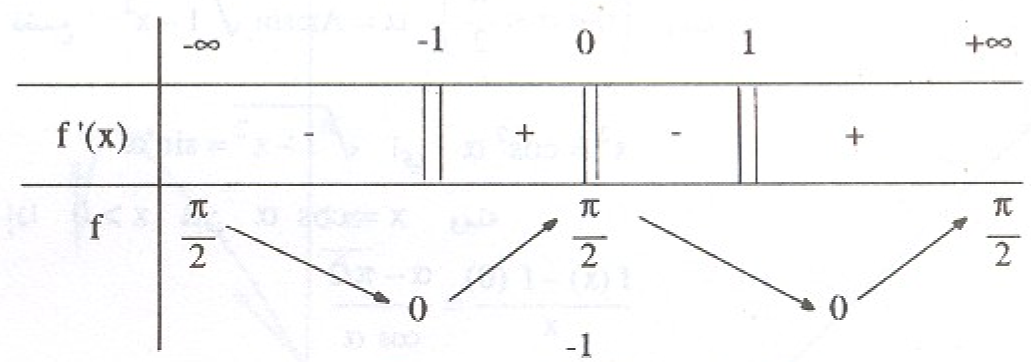
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{1+(x^2-1)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

إذن $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

* وبالتالي فإن

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & ; \ |x| > 1 \\ \frac{-x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & ; \ |x| < 1 \text{ و } x \neq 0 \end{cases}$$

ب- جدول تغيرات الدالة f



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

4- أ- دراسة تقعر المنحنى (C)

* ليكن x عنصرا من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

لدينا

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

ومنه

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{x^2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

ومنه $\forall x \in]1, +\infty[$ $\quad f''(x) < 0$

* ليكن x عنصرا من $]0, 1[$. لدينا

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ومنه

$$f''(x) = -\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

إذن $\forall x \in]0, 1[$ $\quad f''(x) < 0$

وبما أن الدالة f زوجية فإن

$\forall x \in]-1, 0[$ $\quad f''(x) < 0$

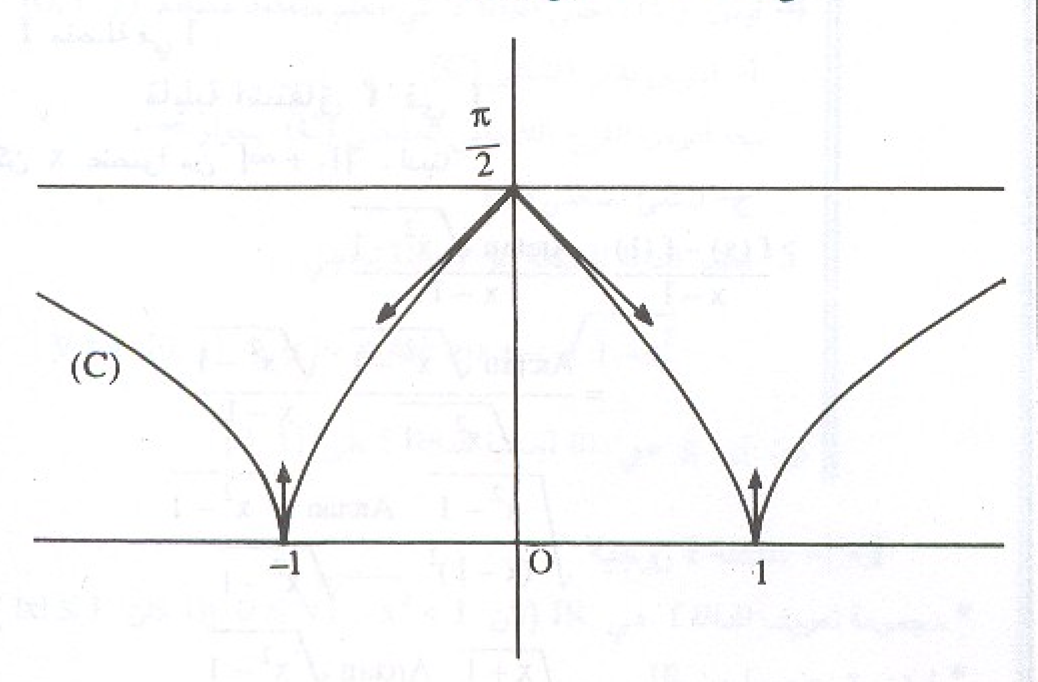
* إذن تقعر المنحنى (C) موجه نحو الأراتيب السالبة

ب- الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

ومنه (C) تقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = \frac{\pi}{2}$ بجوار $+\infty$.

ج- انشاء المنحنى (C)



حسب السؤال الثاني الجزء ب منه . لدينا

$f'_g(0) = 1$ و $f'_d(0) = -1$

ومنه معادلتا نصف مماسي (C) عند $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ هما

$y = x + \frac{\pi}{2}$ و $y = -x + \frac{\pi}{2}$

5- الدالة الأصلية للدالة f

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$. لدينا

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{Arc}\cos x - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \text{Arc}\cos x$$

ولدينا $\forall x \in]0, 1[$ $\quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

ومنه $\forall x \in]0, 1[$ $\quad f'(x) = \text{Arccos}'(x)$

ومنه $\forall x \in [0, 1]$ $\quad f(x) = \text{Arc}\cos x + \alpha$

لدينا $f(0) = \frac{\pi}{2}$ و $\text{Arc}\cos 0 = \frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha = 0$

إذن $(\forall x \in [0, 1])$ $\quad f(x) = \text{Arc}\cos x$

ومنه $(\forall x \in]0, 1[)$ $\quad g'(x) = f(x)$

وهذا يعني أن g هي دالة أصلية لقصور f على $[0, 1]$

* * * *

18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{\text{Arc} \sin x}{x} \quad \forall x \in [-1, 1] - \{0\}$$
$$f(0) = 1$$

1- بين أن الدالة f زوجية

2- أ- بين أنه مهما يكن x من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 0

3- أ- بين أن $\text{Arc} \sin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in [0, 1[$

ب- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

د- استنتج أن $|x| \leq |\text{Arc} \sin x| \quad (\forall x \in [-1, 1])$

4- لتكن g قصور الدالة f على $[0, 1]$ و h قصورها على $[-1, 0]$

أ- بين أن g تقابل من $[0, 1]$ نحو مجال I يجب تحديده.

ب- استنتج أن h تقابل من $[-1, 0]$ نحو مجال J يجب تحديده وأن

$$\forall x \in J \quad h^{-1}(x) = -g^{-1}(x)$$

5- لتكن (C) و (C_1) و (C_2) منحنيات الدوال f و h^{-1} و g^{-1} في معلم متعامد ممنظم.

انشئ المنحنيات (C) و (C_1) و (C_2)

1- الدالة f زوجية

* لدينا $[-1, 1]$ هي مجموعة تعريف الدالة f . وهي متماثلة بالنسبة للصفر

* ليكن x عنصرا من $[-1, 1]$

إذا كان $x \neq 0$ فإن $-x \neq 0$ ومنه

$$f(-x) = \frac{\text{Arc} \sin(-x)}{-x} = -\frac{\text{Arc} \sin x}{-x} = \frac{\text{Arc} \sin x}{x} = f(x)$$

إذا كان $x = 0$ فإن $f(-x) = f(x)$

* إذن $\forall x \in [-1, 1] \quad f(-x) = f(x)$

* وبالتالي فإن f زوجية

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

* نعتبر الدالة العددية u المعرفة بما يلي

$$u(x) = \sin x - x$$

لدينا $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad u'(x) = \cos x - 1$

ومنه $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \geq u'(x)$

إذن u تناقصية قطعا على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad u(0) \geq u(x)$

أي $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin x - x \leq 0$

* نعتبر الدالة v المعرفة بمايلي

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

لدينا $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v''(x) = -\sin x + x$

أي $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v''(x) = -u(x)$

ومنه $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v''(x) \geq 0$

إذن 'v تزايدية قطعا على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ومنه

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v'(x) \geq v'(0)$$

أي $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v'(x) \geq 0$

ومنه v تزايدية قطعا على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

إذن $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad v(x) \geq v(0)$

أي $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$

* وبالتالي فإن $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $[-1, 1] - \{0\}$

لدينا

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\text{Arc} \sin x}{x} - 1\right) = \frac{\text{Arc} \sin x - x}{x^2}$$

نضع $\alpha = \text{Arc} \sin x \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ و } \alpha \neq 0\right)$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

إذن

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

إذا كان $\alpha > 0$ فإنه حسب السؤال السابق لدينا

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \leq \sin \alpha \leq \alpha$$

أي

$$0 \leq \alpha - \sin \alpha \leq \frac{\alpha^3}{6}$$

ومنه $0 \le \frac{\alpha - \sin\alpha}{\sin^2\alpha} < \frac{\alpha}{6}\cdot\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$

وبما أن $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$ فإن

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{6}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=0$$

إذن $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\frac{\alpha-\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=0$

أي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

إذا كان $\alpha<0$ فإن $-\alpha>0$ وحسب السؤال السابق لدينا

$$-\alpha-\frac{(-\alpha)^3}{6}\le\sin(-\alpha)\le-\alpha$$

أي $\alpha\le\sin\alpha\le\alpha-\frac{\alpha^3}{6}$

ومنه $\frac{\alpha}{6}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\le\frac{\alpha-\sin\alpha}{\sin^2\alpha}\le 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}}\frac{\alpha-\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=0$

أي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

ومنه فإن f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0)=0$

3-أ- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x\in[0,1[\quad g(x)=\text{Arc}\sin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ليكن x عنصرا من $[0,1[$ لدينا

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-x\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$=\frac{-x^2}{\sqrt{(x^2-1)}^{2}}$$

ومنه $\forall x\in[0,1[\quad g'(x)\le 0$

إذن g تناقصية قطعا على $[0,1[$

ومنه $\forall x\in[0,1[\quad g(x)\le g(0)$

أي $\forall x\in[0,1[\quad \text{Arc}\sin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\le 0$

أي $\forall x\in[0,1[\quad \text{Arc}\sin x\le\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ب- قابلة اشتقاق f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]0,1[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{x-1}\left(\frac{\text{Arcsin}\,x}{x}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}\left(\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}\left(\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\text{Arcsin}-\frac{\pi}{2}}{x-1}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{2}}{x-1}=+\infty$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

ج- جدول تغيرات الدالة f

بما أن الدالة f زوجية فإنه يكفي دراستها على المجال$[0,1[$

ليكن x عنصرا من $]0,1[$ لدينا

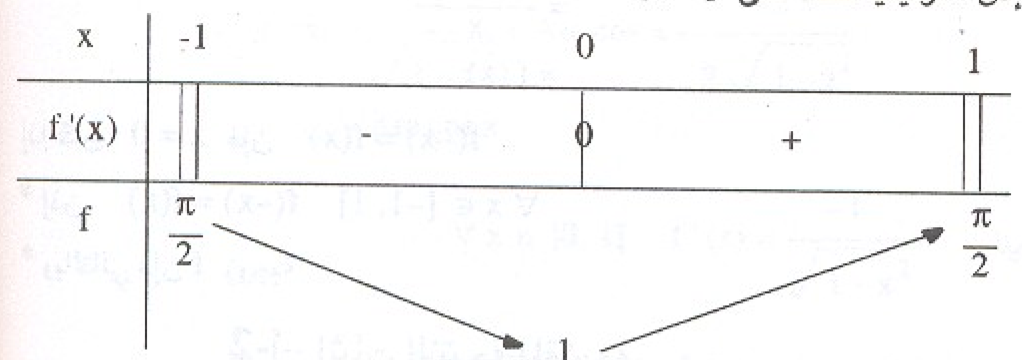
$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x^2}\text{Arcsin}\,x$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\text{Arcsin}\,x\right)$$

وحسب السؤال الثالث الجزء أ منه لدينا

$$0\le f'(x)$$

إذن f تزايدية قطعا على $[0,1]$



x	-1		0		1
f'(x)		-	0	+	
f	$\frac{\pi}{2}$	↘	1	↗	$\frac{\pi}{2}$

د- الاستنتاج

لدينا 1 هي القيمة الدنوية للدالة f و $f(0)=1$ فإن

$$\forall x\in[-1,1]-\{0\}\quad 1<f(x)$$

ومنه $\forall x\in[-1,1]-\{0\}\quad 1<\left|\frac{\text{Arc}\sin x}{x}\right|$

أي $\forall x\in[-1,1]-\{0\}\quad |x|<|\text{Arc}\sin x|$

وبما أن $\text{Arcsin}\,0=0$ فإن

$$\forall x\in[-1,1]\quad |x|\le|\text{Arc}\sin x|$$

4- أ- التقابل g

- لدينا g متصلة على [0, 1] لأن f قابلة للاشتقاق على]-1, 1[

وأن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = g(1)$

- لدينا g تزايدية قطعا على [0 , 1]

إذن g تقابل من [0, 1] نحو المجال I حيث

$$I = [g(0), g(1)]$$
$$= \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

إذن g تقابل من [0, 1] نحو $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

ب- الاستنتاج

لدينا f زوجية ومنه

$$\forall x \in [-1, 0] \quad f(-x) = f(x)$$

أي $\forall x \in [-1, 0] \quad h(x) = g(-x)$

نعتبر الدالة φ المعرفة بمايلي

$$\varphi : [-1, 0] \longrightarrow [0, 1]$$
$$x \longmapsto -x$$

لدينا إذن $h = g \circ \varphi$

وبما أن φ تقابل من [-1, 0] نحو [0, 1] و g تقابل من [0, 1] نحو $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

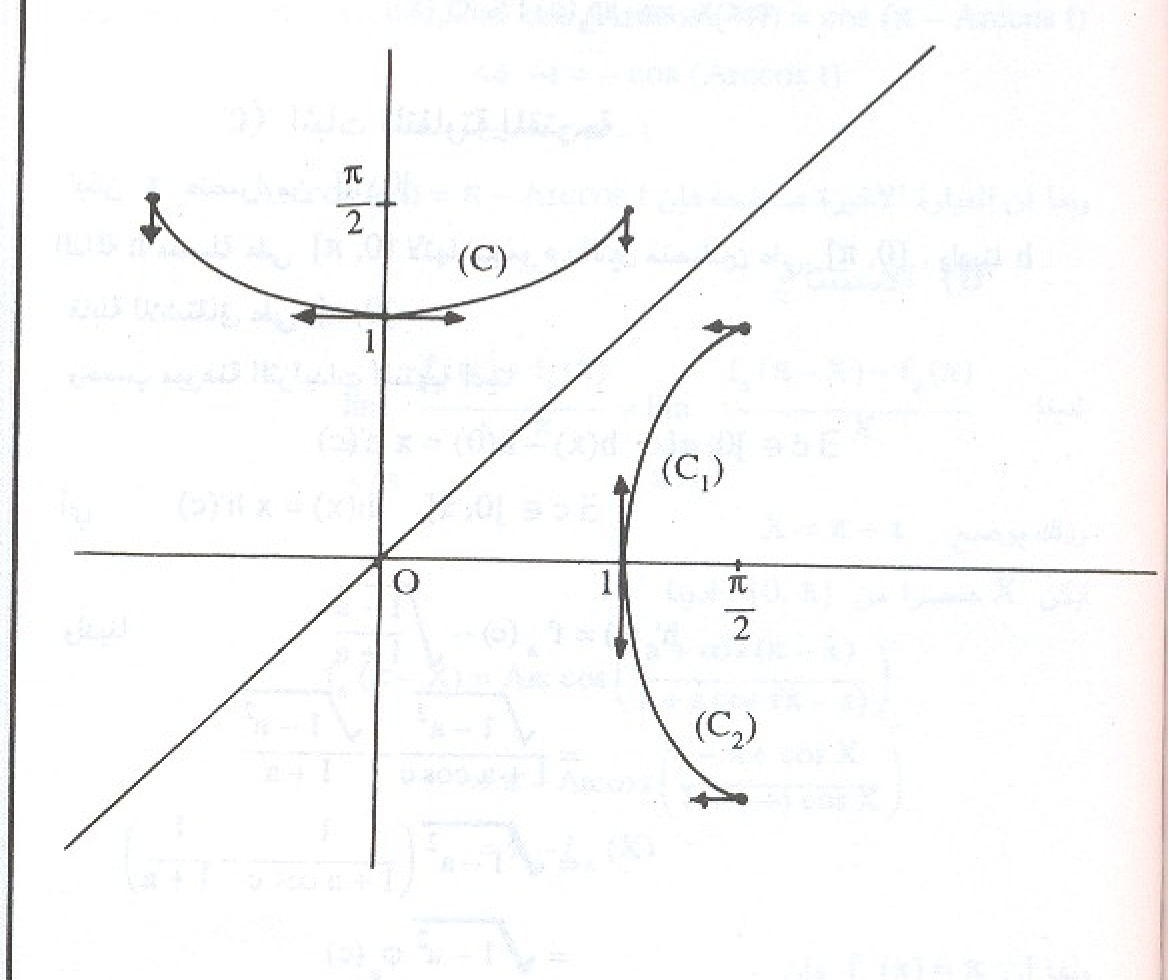
فإن h تقابل من [-1, 0] نحو $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

ولدينا $h^{-1} = \varphi^{-1} \circ g^{-1}$

إذن $\forall x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \quad h^{-1}(x) = \varphi^{-1}(g^{-1}(x))$

أي $\forall x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \quad h^{-1}(x) = -g^{-1}(x)$

5- انشاء المنحنيات (C) و (C_1) و (C_2)



19

ليكن a عددا حقيقيا بحيث |a| < 1 و f_a الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$f_a(x) = \text{Arc}\cos\left(\frac{a + \cos x}{1 + a\cos x}\right)$$

-1 a) أثبت أنه : $(\forall x \in IR) \quad 1 + a\cos x > 0$

b) أوجد D مجموعة تعريف الدالة f_a

-2 a) أثبت أنه يكن الاقتصار على المجال [0, π] لدراسة الدالة f_a

b) بين أن $\quad f'_a(x) = \dfrac{\sqrt{1 - a^2}}{1 + a\cos x} \quad \forall x \in]0, \pi[$

-3 لتكن φ_a الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \varphi_a(x) = \frac{1}{1 + a\cos x} - \frac{1}{1 + a}$$

a) ادرس ، حسب قيم a ، تغيرات الدالة φ_a

b) استنتج أنه مهما يكن x و c من المجال]0, x[فإن

$$c < x \Leftrightarrow |\varphi_a(c)| \leq |\varphi_a(x)|$$

c) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة h حيث

$$h : t \longmapsto f_a(t) - \sqrt{\frac{1 - a}{1 + a}}\, t$$

وعلى المجال [0, x] حيث $0 < x < \pi$ اثبت أن

$$\left| f_a(x) - \sqrt{\frac{1 - a}{1 + a}}\, x \right| \leq x\sqrt{1 - a^2}\, |\varphi_a(x)|$$

d) استنتج أن f_a قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

-4 a) أثبت أن $\text{Arccos}(-t) = \pi - \text{Arc}\cos t \quad \forall x \in [-1, 1]$

b) استنتج أن f_a قابلة للاشتقاق على اليسار في π

-5 اعط جدول تغيرات الدالة f_a على [0, π]

-6 لتكن g_a الدالة المعرفة من [0, π] نحو [0, π] بما يلي

$$g_a(x) = f_a(x)$$

a) بين أن g_a تقابل

b) أثبت أن $(g_a)^{-1} = g_{-a}$

-7 ليكن (C_a) منحنى الممثل الدالة f_a على المجال [-π,π] في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ارسم $(C_{1/2})$ و $(C_{-1/2})$

من موضوع دورة فبراير 92

1-a) اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$|\cos x| \leq 1$ و $|a| < 1$ ومنه $|a||\cos x| < 1$

أي $-1 < a\cos x < 1$

ومنه $1 + a\cos x > 0$

إذن $1 + a\cos > 0 \quad \forall x \in IR$

b) تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR لدينا :

$$x \in D \Leftrightarrow -1 \leq \frac{a + \cos x}{1 + a\cos x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 - a\cos x \le a + \cos x \le 1 + a\cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+1) + (1+a)\cos x \ge 0 \\ (1-a) + (a-1)\cos x \ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+1)(1+\cos x) \ge 0 \\ (1-a)(1-\cos x) \ge 0\end{cases}$$

وبما أن $|a| < 1$ فإن $a + 1 > 0$ و $1 - a > 0$ ومنه

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases}1 + \cos x \ge 0 \\ 1 - \cos x \ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \cos x \le 1$$

إذن $D = IR$

2- a) مجموعة دراسة الدالة f

* بما أن الدالة cosinus دورية و 2π دور لها فإن الدالة f_a دورية و 2π دور لها.

ومنه يكفي دراستها على $[-\pi, \pi]$

* وبما أن الدالة cosinus زوجية فإن الدالة f_a زوجية

ومنه يكفي دراستها على $[0, \pi]$

b) الدالة المشتقة للدالة f_a

ليكن x عنصرا من $]0, \pi[$ لدينا

$$f_a(x) = \text{Arc}\cos u(x)$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بمايلي

$$u(x) = \frac{a + \cos x}{1 + a\cos x}$$

ومنه

$$f'_a(x) = u'(x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$$

لدينا

$$u'(x) = \frac{-\sin x\,(1 + a\cos x) - (a + \cos x)(-a\sin x)}{(1 + a\cos x)^2}$$

$$= -\sin x \cdot \frac{1 + a\cos x - a^2 - a\cos x}{(1 + a\cos x)^2}$$

$$= -\sin x. \frac{1 - a^2}{(1 + a\cos)^2}$$

ولدينا

$$1 - u^2(x) = 1 - \left(\frac{a + \cos x}{1 + a\cos x}\right)^2$$

$$= \frac{(1 + a\cos x)^2 - (a + \cos x)^2}{(1 + a\cos x)^2}$$

$$= \frac{1 - a^2 + (a^2 - 1)\cos^2 x}{(1 + a\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - a^2)\sin^2 x}{(1 + a\cos x)^2}$$

ومنه

$$\sqrt{1 - u^2(x)} = \frac{\sqrt{1 - a^2} \cdot \sin x}{1 + a\cos x}$$

إذن

$$f'_a(x) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 + a\cos x}$$

3- a) تغيرات الدالة φ_a

لتكن x عنصرا من $]0, \pi[$. لدينا

$$\varphi'_a(x) = \frac{a\sin x}{(1 + a\cos x)^2}$$

لدينا $\sin x > 0$ ومنه

إذا كان $a > 0$ فإن $\varphi'_a(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$

إذا كان $a < 0$ فإن $\varphi'_a(x) < 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$

إذا كان $a = 0$ فإن $\varphi'_a(x) = 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$

إذن إذا كان $a = 0$ فإن φ_a ثابتة

إذا كان $a > 0$ فإن φ_a تزايدية قطعا على $[0, \pi]$

إذا كان $a < 0$ فإن φ_a تناقصية قطعا على $[0, \pi]$

b) الاستنتاج

ليكن x و c عنصرين من $]0, \pi[$ بحيث $c < x$

الحالة الأولى : $a = 0$

لدينا في هذه الحالة φ_a ثابتة ومنه

$\varphi_a(x) = \varphi_a(c)$ إذن $|\varphi_a(x)| = |\varphi_a(c)|$

الحالة الثانية : $a > 0$

لدينا φ_a تزايدية قطعا على $[0, \pi]$ ومنه

$0 < \varphi_a(c) < \varphi_a(x)$ إذن $|\varphi_a(x)| < |\varphi_a(c)|$

الحالة الثالثة : $a < 0$

لدينا φ_a تناقصية قطعا على $[0, \pi]$ ومنه

$\varphi_a(x) < \varphi_a(c) < 0$ إذن $|\varphi_a(x)| > |\varphi_a(c)|$

إذن مهما يكن x و c من $]0, \pi[$ فإن

$$c < x \Rightarrow |\varphi_a(c)| \le |\varphi_a(x)|$$

c) اثبات المتفاوتة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]0, \pi[$

الدالة h متصلة على $[0, \pi]$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $[0, \pi]$. ولدينا h قابلة للاشتقاق على $]0, x[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists c \in]0, x[\quad h(x) - h(0) = x\,h'(c)$$

أي

$$\exists c \in]0, x[\quad h(x) = x\,h'(c)$$

ولدينا

$$h'(c) = f'_a(c) - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 + a\cos c} - \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 + a}$$

$$= \sqrt{1 - a^2}\left(\frac{1}{1 + a\cos c} - \frac{1}{1 + a}\right)$$

$$= \sqrt{1 - a^2}\,\varphi_a(c)$$

وبما أن $c < x$ فإنه حسب السؤال السابق لدينا

$$|\varphi_a(c)| \le \varphi_a(x) \qquad |h'(c)| \le \sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)|$$

إذن $|h(x)| \le x\sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)|$

أي $\left|f_a(x) - \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\,x\right| \le x\sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)|$

d) الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]0, \pi[$

لدينا $\left|f_a(x) - \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\,x\right| \le x\sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)|$

أي $\left|\dfrac{f_a(x)}{x} - \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right| \le \sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)|$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi_a(x) = \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{1}{1+a} = 0$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{1-a^2}\,|\varphi_a(x)| = 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f_a(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}$

أي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}$

إذن f_a قابلة للاشتقاق على اليمين في a

4- a) اثبات النتيجة المقترحة

ليكن t عنصرا من $[-1, 1]$

لدينا $0 \le \text{Arccos}\, t \le \pi$ ومنه $0 \le \pi - \text{Arccos}\, t \le \pi$ إذن

$$\text{Arccos}(-t) = \pi - \text{Arccos}\, t \Leftrightarrow \cos(\text{Arccos}(-t)) = \cos(\pi - \text{Arccos}\, t)$$
$$\Leftrightarrow -t = -\cos(\text{Arccos}\, t)$$
$$\Leftrightarrow -t = -t$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $\text{Arccos}(-t) = \pi - \text{Arccos}\, t$

b) الاستنتاج

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} \dfrac{f_a(x) - f_a(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \dfrac{f_a(\pi - X) - f_a(\pi)}{-X}$

وذلك بوضع $X = \pi - x$

ليكن X عنصرا من $[0, \pi]$. لدينا

$$f_a(\pi - X) = \text{Arc}\cos\left(\frac{a + \cos(\pi - X)}{1 + a\cos(\pi - X)}\right)$$
$$= \pi - \text{Arccos}\left(\frac{-a + \cos X}{1 + (-a)\cos X}\right)$$
$$= \pi - f_{-a}(X)$$

وبما أن $f_a(x) = \pi$ فإن

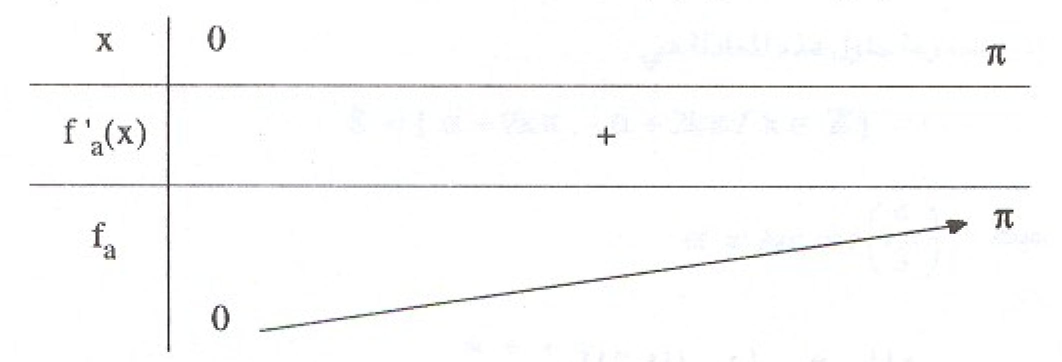
$$\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} \frac{f_a(x) - f_a(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} -\frac{\pi - f_{-a}(X) - \pi}{X}$$
$$= \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \frac{f_{-a}(\pi)}{X}$$
$$= \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

إذن f_a قابلة للاشتقاق على اليسار في π

5- جدول تغيرات الدالة f_a

لدينا $\forall x \in]0, x[\quad f'_a(x) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1 + a\cos x}$

ومنه $\forall x \in]0, x[\quad f'_a(x) > 0$



x	0 $\qquad\qquad$ π
$f'_a(x)$	$+$
f_a	$0 \nearrow \pi$

6- a) التقابل

لدينا g_a متصلة على $[0, \pi]$ وتزايدية قطعا على $[0, \pi]$

ومنه g_a تقابل من $[0, \pi]$ نحو المجال I حيث

$I = [f_a(0), f_a(\pi)] = [0, \pi]$

إذن التطبيق g_a تقابل.

b) اثبات المتساوية المفترحة

ليكن x عنصرا من $[0, \pi]$. لدينا $g_a \circ g_{-a}(x) = g_a(g_{-a}(x))$

ولدينا $\cos(g_{-a}(x)) = \cos\left(\text{Arc}\cos\left(\dfrac{-a + \cos x}{1 - a\cos x}\right)\right)$

$$= \frac{-a + \cos x}{1 - a\cos x}$$

ومنه

$$\frac{a + \cos(g_{-a}(x))}{1 + a\cos(g_{-a}(x))} = \frac{a + \dfrac{-a + \cos x}{1 - a\cos x}}{1 + a.\dfrac{-a + \cos x}{1 - a\cos x}}$$
$$= \cos x$$

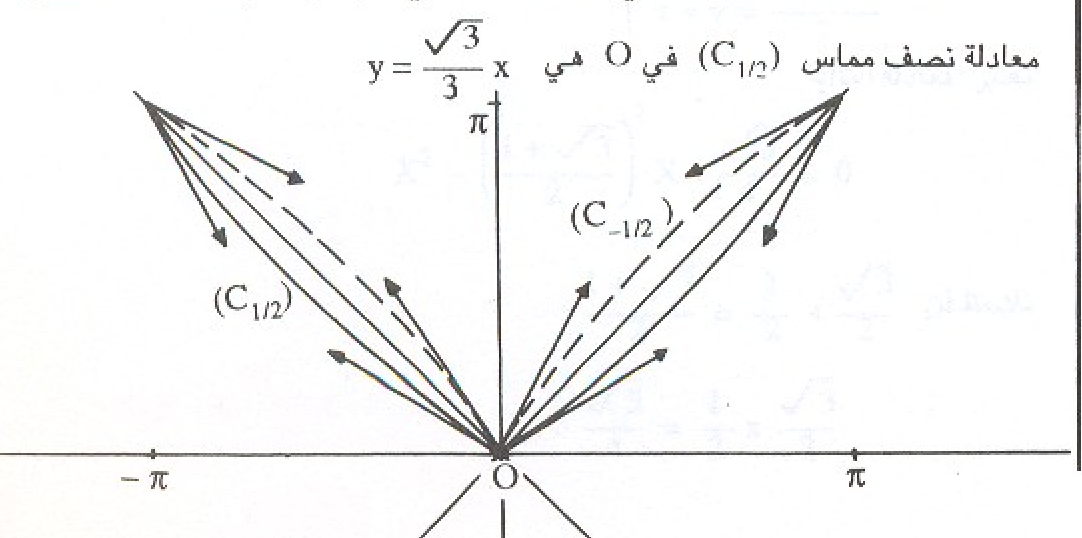
إذن $g_a \circ g_{-a}(x) = \text{Arc}\cos(\cos x) = x$

وبالتالي $g_a^{-1} = g_{-a}$

7- انشاء المنحنيين

معادلة نصف مماس $(C_{1/2})$ في $A(\pi, \pi)$ هي $y = \sqrt{3}\,x + \pi(1 - \sqrt{3})$

معادلة نصف مماس $(C_{1/2})$ في O هي $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x$



5 الدوال اللوغاريتمية

- دالة اللوغاريتم النبيري
- دراسة الدالة اللوغاريتمية
- المشتقة اللوغاريتمية
- نهايات هامة
- دالة اللوغاريتم للاساس a .
- الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

1

حل في IR المعادلتين التالية

1- $\ln x + \ln (x+3) = 2\ln 2$

2- $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - \ln x + 4 = 0$

3- $\sin (\ln x) = \frac{1}{2}$

4- $\ln (3\cos x) = 1$

1- حل المعادلة الأولى

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا $\ln x + \ln (x+3) = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x(x+3) = \ln 2^2$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

علما أن $x + 4 > 0$.

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي :

$S_1 = \{1\}$

2- حل المعادلة الثانية

ليكن x عنصرا من IR_+^* . نضع $X = \ln x$ ولدينا معادلة الثانية تكافئ $P(X) = 0$

حيث $P(X)$ هي الحدودية المعرفة بما يلي

$P(X) = X^3 - 4X^2 - X + 4$

لدينا $P(X) = X^2(X-4) - (X-4)$

$= (X-4)(X^2-1)$

$= (X-4)(X-1)(X+1)$

ومنه $P(X) = 0 \Leftrightarrow X = 4$ أو $X = 1$ أو $X = -1$

إذن معادلة الثانية تكافئ

$\ln x = 4$ أو $\ln x = 1$ أو $\ln x = -1$

أي $x = e^4$ أو $x = e$ أو $x = e^{-1}$

إذن مجموعة حلول المعادلة الثانية هي $S_2 = \left\{\frac{1}{e}, e, e^4\right\}$

3- حل المعادلة الثالثة

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$\sin(\ln x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(\ln x) = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \ln x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة الثالثة هي $S = \{\alpha_k, \beta_k / k \in Z\}$

حيث

$\alpha_k = e^{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

$\beta_k = e^{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$

(k عدد صحيح نسبي)

4- حل المعادلة الرابعة

ليكن x عنصرا من IR . بحيث $\cos x > 0$. لدينا

$\ln(3\cos x) = 1 \Leftrightarrow 3\cos x = e$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{e}{3}$

نضع $\alpha = \text{Arc}\cos\left(\frac{e}{3}\right)$ ويكون لدينا

$\ln(3\cos x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{أو} \\ x = -\alpha + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

لدينا $0 < \frac{e}{3} < 1$ ومنه $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ومنه $\cos\alpha > 0$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي

$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

حيث $\alpha = \text{Arc}\cos\left(\frac{e}{3}\right)$

* * * *

2

1- حل في IR^2 النظمة التالية

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln\sqrt{3} - 2\ln 2 \\ 2(x+y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

2- حل في $[0, 2\pi]$ المعادلة التالية

$\ln(\cos x) + \ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

1- حل النظمة المقترحة

ليكن (x,y) عنصرا من IR^2. لدينا

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln\sqrt{3} - 2\ln 2 \\ 2(x+y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(xy) = \ln\sqrt{3} - \ln 4 \\ x + y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(xy) = \ln\frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

نعتبر المعادلة التالية

$$X^2 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 X + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

نلاحظ أن $\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما جذرا هذه المعادلة

إذن مجموعة حلول هذه النظمة هي

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $[0,2\pi]$. نلاحظ أنه إذا كان x حلا لهذه المعادلة فإن $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$ ومنه $\cos x + \sin x > 0$ إذن

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos x \sin x} \end{aligned}$$

نضع $\alpha = \cos x$ و $\beta = \sin x$ ويكون لدينا :

$$\ln(\cos x) = \ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\alpha + \ln\beta = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ \alpha + \beta = \sqrt{1 + 2\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\alpha\beta) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ \alpha + \beta = \sqrt{1 + 2\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \alpha + \beta = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

ونلاحظ أن $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$$\ln(\cos x) = \ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in S$$

حيث S هي مجموعة حلول النظمة السابقة

ولدينا

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

علما أن $x \in [0,\pi]$

ولدينا

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right\}$

3

حل في IR المتراجحات التالية :

1- $\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) < \ln(x+1)$

2- $\ln x + \ln(x^2 - 5) > \ln 2 + \ln(x^2 - 3)$

3- $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$

1- حل المتراجحة الأولى

ليكن x عنصرا من IR. بحيث

$x + 1 > 0$ و $\frac{x+2}{x-2} > 0$ و $x \neq 2$

أي بحيث $2 < x$

لدينا

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) < \ln(x+1) &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} < x+1 \\ &\Leftrightarrow x+2 < (x+1)(x-2) \\ &\Leftrightarrow x+2 < x^2 - x - 2 \\ &\Leftrightarrow 0 < x^2 - 2x - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 < (x-1)^2 - 5 \\ &\Leftrightarrow 5 < (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5} < |x-1| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5} < x - 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5} + 1 < x \end{aligned}$$

وبما أن $\sqrt{5} + 1 > 2$ فإن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي

$$S_1 =]\sqrt{5} + 1, +\infty[$$

2- حل المتراجحة الثانية

ليكن x عنصرا من IR بحيث

$x^2 - 3 > 0$ و $x^2 - 5 > 0$ و $x > 0$

أي بحيث $x > \sqrt{5}$

لدينا $\ln x + \ln(x^2 - 5) = \ln(x(x^2 - 5))$

$\ln 2 + \ln(x^2 - 3) = \ln(2(x^2 - 3))$

ومنه المتراجحة المقترحة تكافئ $\ln(x(x^2 - 5)) > \ln(2(x^2 - 3))$

أي $x(x^2 - 5) > 2(x^2 - 3)$

بمعنى أن $x^3 - 5x > 2x^2 - 6$

أي $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$

نلاحظ أن 1 جذر للحدودية $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

وباجراء القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $(x-1)$ نجد أن

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x-1)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right] \\ &= (x-1)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] \\ &= (x-1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

إذن المتراجحة الثانية تكافئ $(x-1)(x-3)(x+2) > 0$

أي $x-3>0$

علما أن $x > \sqrt{5}$ (ومنه $x+2>0$ و $x-1>0$)

ومنه مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S_2 =]3, +\infty[$

3- حل المتراجحة الثالثة

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا

$$\ln^2 x - \ln x - 2 = \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2$$
$$= \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$
$$= (\ln x + 1)(\ln x - 2)$$

ومنه

$$\ln^2 x - \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 2) < 0$$
$$\Leftrightarrow -1 < \ln x < 2$$
$$\Leftrightarrow e^{-1} < x < e^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e^2$$

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S_3 = \left]\frac{1}{e}, e^2\right[$

* * * *

4

بين أنه مهما يكن a و b عنصرين من IR_+^* فإن

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \le \ln(a+b)$$

اثبات النتيجة المقترحة

ليكن a و b عنصرين من IR_+^* . لدينا

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}(2\ln 2 + \ln(ab))$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 4 + \ln(ab))$$
$$= \frac{1}{2}\ln(4ab)$$
$$= \ln(4ab)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \ln(2\sqrt{ab})$$

ومنه

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \le \ln(a+b) \Leftrightarrow \ln(2\sqrt{ab}) \le \ln(a+b)$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b$$

وبما أن العبارة الاخيرة صحيحة فإن

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \le \ln(a+b)$$

إذن مهما تكن a و b عنصرين من IR_+^* . فإن

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \le \ln(a+b)$$

5

نعتبر الدالة العددية $(u_n)_{n\ge 2}$ المعرفة بمايلي

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in IN^* - \{1\}$$

1- ليكن n عنصرا من $IN^*-\{1\}$

أ- بين أن $u_2 . u_3 \times \ldots\ldots \times u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

ب- احسب بدلالة n المجموع $\sum_{k=2}^{n} \ln(u_k)$

3- حدد النهاية $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k)$

1- اثبات المتراجحة المقترحة

* من أجل $n=2$ لدينا العبارة المقترحة صحيحة لان

$u_2 = \frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{3}{4}$

ليكن n عنصرا من $IN^*-\{1\}$

نفترض أن $u_2 \times u_3 \times \ldots\ldots \times u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

ونبين أن $u_2 \times u_3 \times \ldots\ldots \times u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

لدينا

$$u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_{n+1} = (u_2 \times \ldots\ldots \times u_n) \times u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} . \frac{n+1}{n} \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

إذن $u_2 \times u_3 \times \ldots\ldots \times u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad \forall n \in IN^*-\{1\}$

ب- حساب المجموع المقترح

لدينا

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n} u_k\right)$$
$$= \ln(u_2 \times \ldots\ldots \times u_n)$$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

إذن $\sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2$

3- تحديد النهاية المطلوبة

حسب السؤال الاول لدينا

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2 \qquad \forall n \in IN^*-\{1\}$$

وبما أن $\lim \frac{n+1}{n} = 1$ فإن $\lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

إذن $\lim \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) = \ln 2$

6

1- ادرس رتابة الدالتين العدديتين u و v المعرفتين بما يلي

$$u(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$$

$$v(x) = x - 1 - \ln x$$

2- استنتج أنه مهما يكن x من $]1, +\infty[$ فإن

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$$

3- بين أنه مهما يكن n من $IN^* - \{1\}$ فإن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

(استعمل السؤال الثاني بأخذ $x = \sqrt[n]{e}$)

1 - رتابة الدالة u

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$. لدينا

$$u(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$$

ومنه

$$u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x^2}$$

إذن

$$\forall x \in]0,1[\qquad u'(x) < 0$$
$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad u'(x) > 0$$

ومنه u تناقصية قطعا على $]0, 1]$ وتزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

رتابة الدالة v

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$. لدينا

$$v'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

ومنه

$$\forall x \in]0,1[\qquad v'(x) < 0$$
$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad v'(x) > 0$$

إذن v تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$ وتناقصية قطعا على $]0, 1]$

2 - الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

لدينا u تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$ ومنه $u(1) < u(x)$

أي $0 < u(x)$ بمعنى أن $\frac{x-1}{x} < \ln x$

لدينا v تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$ ومنه $v(x) > v(1)$

أي $v(x) > 0$ بمعنى أن $\ln x < x - 1$

إذن $\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1 \qquad \forall x \in]1,+\infty[$

3- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$

لدينا $e > 1$ ومنه $\sqrt[n]{e} > 1$

وحسب السؤال الثاني لدينا

$$\frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\sqrt[n]{e}} < \ln \sqrt[n]{e} < \sqrt[n]{e} - 1$$

ولدينا $\ln \sqrt[n]{e} = \ln e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ ومنه

$$\frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\sqrt[n]{e}} < \frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} - 1$$

ومنه

$$\begin{cases} \frac{1}{n} + 1 < \sqrt[n]{e} \\ n\sqrt[n]{e} - n < \sqrt[n]{e} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} \frac{1}{n} + 1 < \sqrt[n]{e} \\ \sqrt[n]{e} < \frac{n}{n-1} \end{cases}$$

إذن

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

ومنه

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

وبالتالي فإن

$$\forall n \in IN^* - \{1\} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

* * * *

7

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

1- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a, +\infty[\qquad f(x) = \frac{x^2 - a^2}{2ax} - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

أ- ادرس رتابة الدالة f

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $]a, +\infty[$ فإن

$$\ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x^2 - a^2}{2ax}$$

2- بين أنه مهما يكن x من $]a, +\infty[$ فإن

$$2 . \frac{x-a}{x+a} < \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

1- أ- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]a, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]a, +\infty[$. لدينا

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\right) - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{x^2}\right) - \frac{1}{a} . \frac{1}{\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 . \frac{1}{x} . \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2$$

إذن $\forall x \in]a,+\infty[\quad f'(x) > 0$

ومنه f تزايدية قطعا على $]a, +\infty[$

ب- الإستنتاج

الدالة f تزايدية قطعا على $]a, +\infty[$ ومنه

$$\forall x \in]a,+\infty[\qquad f(a) < f(x)$$

أي

$$\forall x \in]a, +\infty[\qquad 0 < \frac{x^2 - a^2}{2ax} - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

بمعنى أن

$$\forall x \in]a, +\infty[\qquad \ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x^2 \; a^2}{2ax}$$

2- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a,+\infty[\qquad g(x) = \ln\left(\frac{x}{a}\right) - 2\,\frac{x-a}{x+a}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]a, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]a, +\infty[$. لدينا

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 2 . \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix}}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{4a}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{(x+a)^2 - 4ax}{x(x+a)^2}$$

$$= \frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2}$$

إذن $\forall x \in]a,+\infty[\qquad g'(x) > 0$

ومنه g تزايدية قطعا على $]a, +\infty[$

إذن $\forall x \in]a,+\infty[\qquad g(a) < g(x)$

أي

$$\forall x \in]a,+\infty[\qquad 0 < \ln\left(\frac{x}{a}\right) - 2 . \frac{x-a}{x+a}$$

بمعنى أن

$$\forall x \in]a,+\infty] \qquad 2 . \frac{x-a}{x+a} < \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

* * * *

8

ليكن a و b و c أعدادا حقيقية موجبة قطعا.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f(x) = \ln(abx) - 3\ln(a+b+x)$$

1- أ- ادرس رتابة الدالة f

ب- استنتج أنه مهما يكن x من IR_+^* فإن

$$f(x) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2- بين أن $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le -3\ln 3$

3- أ- استنتج أن $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

ب- متى يكون التساوي ؟

1- أ- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$. لدينا

$$f'(x) = \frac{ab}{abx} - 3 . \frac{1}{a+b+x}$$

$$= \frac{(a+b+x) - 3x}{x(a+b+x)}$$

$$= \frac{a+b-2x}{x(a+b+x)}$$

إذن إذا كان $x < \frac{a+b}{2}$ فإن $f'(x) > 0$

إذا كان $x > \frac{a+b}{2}$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه f تزايدية قطعا على $\left]0, \frac{a+b}{2}\right]$ وتناقصية قطعا على $\left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right[$

ب- الاستنتاج

لدينا f تزايدية قطعا على $\left]0, \frac{a+b}{2}\right]$ ومنه

$$\forall x \in \left]0, \frac{a+b}{2}\right] \qquad f(x) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

لدينا تناقصية قطعا على $\left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right[$ ومنه

$$\forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right[\qquad f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

إذن

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2- اثبات المتفاوتة المقترحة

لدينا

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left(ab \cdot \frac{a+b}{2}\right) - 3\ln\left(a+b+\frac{a+b}{2}\right)$$
$$= \ln(ab) + \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3\ln\left(3\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$
$$= \ln(ab) + \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3\left(\ln 3 - \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$
$$= \ln(ab) - 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3\ln 3$$

ومنه

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq -3\ln 3 \iff \ln(ab) - 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$$
$$\iff \ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\iff ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$
$$\iff 0 \leq (a-b)^2$$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq -3\ln 3$$

3- أ- الاستنتاج

لدينا

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff \ln(abc) \leq 3\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$
$$\iff \ln(abc) \leq 3(\ln(a+b+c) - \ln 3)$$
$$\iff \ln(abc) - 3\ln(a+b+c) \leq -3\ln 3$$
$$\iff f(c) \leq -3\ln 3$$

بما أن $c > 0$ فإنه حسب السؤال الأول الجزء ب منه لدينا

$$f(c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

وحسب السؤال الثاني يكون لدينا $f(c) \leq -3\ln 3$

إذن

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

ب- متى يكون التساوي

لدينا

$$abc = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff f(c) = -3\ln 3$$

وبما أن $f(c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq -3\ln 3$ فإن

$$abc = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -3\ln 3 \text{ و } f(c) = -3\ln 3$$

ولدينا

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln(ab) - 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3\ln 3$$
$$= \ln(ab) - \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 3\ln 3$$
$$= \ln\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}\right) - 3\ln 3$$

ومنه

$$abc = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff \ln\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}\right) = 0 \text{ و } f(c) = -3\ln 3$$
$$\iff \frac{4ab}{(a+b)^2} = 1 \text{ و } f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\iff 4ab = (a+b)^2 \text{ و } f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\iff (a-b)^2 = 0 \text{ و } f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\iff a = b \text{ و } f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

لدينا

$$\forall x \in IR_+^* - \left\{\frac{a+b}{2}\right\} \qquad f(x) < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ومنه

$$f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff c = \frac{a+b}{2}$$

إذن

$$abc = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff a = b \text{ و } c = \frac{a+b}{2}$$
$$\iff a = b = c$$

* * * *

9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \ln(x+1)\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = (x-1)\ln(x+1) - x\ln x$$

أ- حدد الدالة المشتقة الثانية للدالة g

ب- ادرس رتابة الدالة g'

ج- استنتج أن $g'(x) < 0 \qquad \forall x \in [1, +\infty[$

3- أ- ادرس رتابة الدالة f

ب- استنتج أن $f(x) \leq (\ln 2)^2 \qquad \forall x \in D$

4- لتكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا.

بين أن $\ln^2(a+b) - \ln(ab)\ln(a+b) + \ln a \ln b \leq (\ln 2)^2$

1- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ \frac{1}{x}+1>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ \frac{x+1}{x}>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

إذن $D =]0, +\infty[$

2-أ- الدالة المشتقة الثانية للدالة g'

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$g'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln x - \frac{x}{x}$$
$$= \ln(x+1) - \ln x + \frac{x-1}{x+1} - 1$$

ومنه
$$g''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x-1}{x(x+1)^2}$$

إذن $g''(x) = \frac{x-1}{x(x+1)^2} \quad \forall x \in D$

ب- رتابة الدالة g'

لدينا $g''(x) = \frac{x-1}{x(x+1)^2} \quad \forall x \in D$

ومنه $g''(x) < 0 \quad \forall x \in]0,1[$

$g''(x) > 0 \quad \forall x \in]1,+\infty[$

إذن g' تناقصية قطعا على $]0, 1]$ وتزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

ج- الاستنتاج

لدينا g' متصلة على $[1, +\infty[$ وتزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

ومنه $g'([1, +\infty[) = [g'(1), \lim_{x \to +\infty} g'[$

لدينا
$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x + \frac{x-1}{x+1} - 1 \right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}$$
$$= 0$$

علما أن $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{X \to 1} \ln X = 0$

ومنه $g'([1, +\infty[) = [\ln 2 - 1, 0[$

إذن $g'(x) < 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

3-أ- رتابة الدالة f

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$f(x) = \ln(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$= \ln(x+1)(\ln(x+1) - \ln x)$$

ومنه
$$f'(x) = \frac{1}{x+1}(\ln(x+1) - \ln x) + \ln(x+1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x(x+1)}(x \ln(x+1) - x \ln x - \ln(x+1))$$
$$= \frac{1}{x(x+1)}[(x-1)\ln(x+1) - x \ln x]$$
$$= \frac{1}{x(x+1)} g(x)$$

لدينا $g'(x) < g(1) \quad \forall x \in [1,+\infty[$ ومنه g تناقصية قطعا على $[1, +\infty[$

إذن $g(x) \le g(1) \quad \forall x \in [1,+\infty[$

أي $g(x) \le 0 \quad \forall x \in [1,+\infty[$

ومنه $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in [1,+\infty[$

إذن f تناقصية قطعا على $[1, +\infty[$

ليكن x و y عنصرين من $]0, 1]$ بحيث $x < y$

لدينا $1 \le \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ وبما أن f تناقصية قطعا على $[1, +\infty[$

فإن $f\left(\frac{1}{y}\right) > f\left(\frac{1}{x}\right)$

ولدينا
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(x+1)$$
$$= f(x)$$

إذن $f(y) > f(x)$

ومنه f تزايدية قطعا على $]0, 1]$

ب- الاستنتاج

لدينا f تزايدية قطعا على $]0, 1]$ ومنه

$f(x) \le f(1) \quad \forall x \in]0,1]$

ولدينا f تناقصية قطعا على $[1, +\infty[$ ومنه

$f(x) \le f(1) \quad \forall x \in]1,+\infty]$

إذن $f(x) \le f(1) \quad \forall x \in D$

أي $f(x) \le (\ln 2)^2 \quad \forall x \in D$

4- اثبات المتفاوتة المقترحة

نضع $X = \ln^2(a+b) - \ln(ab)\ln(a+b) + \ln a \ln b$

لدينا $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ومنه

$$X = \ln^2(a+b) - (\ln a + \ln b)\ln(a+b) + \ln a . \ln b$$
$$= (\ln(a+b) - \ln a))(\ln(a+b) - \ln b)$$

$$= \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}+1\right)\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)$$

$$= f\left(\frac{b}{a}\right)$$

وحسب السؤال الثالث الجزء ب منه لدينا $X = (\ln 2)^2$

إذن $\ln^2(a+b) - \ln(ab)\ln(a+b) + \ln a \,.\, \ln b \leq (\ln 2)^2$

* * * *

10

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \qquad \forall x \in IR_+^* - \{1\}$$

$$f(1) = 1$$

1- بين أنه مهما يكن x من $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ فإن

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 1

1- اثبات النتيجة المقترحة

* نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

ليكن x عنصرا من $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ لدينا :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)$$

$$= \frac{1 - (1-x)(1+x) - x^2(x+1)}{1+x}$$

$$= \frac{1 - (1-x^2) - x^2 - x^3}{1+x}$$

$$= \frac{-x^3}{1+x}$$

ومنه إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$

إذن g تزايدية قطعا على $\left]-\frac{1}{2}, 0\right]$ وتناقصية قطعا على $[0, +\infty[$

ومنه $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\qquad g(x) \leq g(0)$

أي $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\qquad g(x) \leq 0$

إذن $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\qquad \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

* نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي

$$h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$$

ليكن x عنصرا من $\left]-\frac{1}{2}, 0\right]$. لدينا

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - 2x^3)$$

$$= \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2) + 2x^3$$

$$= \frac{-x^3}{1+x} + 2x^3$$

$$= x^3\left(2 - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{x^3(2x+1)}{1+x}$$

ومنه إذا كان $-\frac{1}{2} < x < 0 \qquad h'(x) < 0$

إذا كان $0 < x \qquad h'(x) > 0$

إذن h تزايدية قطعا على $[0, +\infty[$ وتناقصية قطعا على $\left]-\frac{1}{2}, 0\right]$

ومنه $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\qquad h(0) \leq h(x)$

أي $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\qquad 0 \leq h(x)$

إذن $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x)$

* وبالتالي فإنه مهما يكن x من IR بحيث $x > -\frac{1}{2}$ فإن

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ لدينا

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{\ln x}{x-1} - 1\right)$$

$$= \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$$

حسب السؤال الأول يكون لدينا

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \leq \ln x \leq (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

أي

$$\frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^4}{4} \leq \ln x - x + 1 \leq \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2}$$

أي

$$\frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \leq \frac{x-1}{3} - \frac{1}{2}$$

ومنه $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

وبما أن $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

فإن $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 ولدينا $f'(1) = -\frac{1}{2}$

* * * *

11

ليكن α عنصرا من المجال $]0, 1[$

نربط كل عدد حقيقي موجب قطعا a بالدالة العددية f_a المعرفة بما يلي

$$f_a(x) = \ln(\alpha x + (1-\alpha) a) - \alpha \ln x$$

1- ليكن a عنصرا من IR_+^*

أ- ادرس رتابة الدالة f_a

ب- استنتج أن $f_a(x) \geq (1-\alpha) \ln a \quad \forall x \in IR_+^*$

2- استنتج أنه مهما يكن x و y من IR_+^* فإن

$$\alpha x + (1-\alpha) y \geq x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

1- أ- رتابة الدالة f_a

الدالة f_a قابلة للاشتقاق على IR_+^*

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f'_a(x) = \frac{\alpha}{\alpha x + (1-\alpha) a} - \frac{\alpha}{x}$$

$$= \alpha \cdot \frac{x - \alpha x - (1-\alpha) a}{x(\alpha x + (1-\alpha) a)}$$

$$= \alpha (1-\alpha) \cdot \frac{x - a}{x(\alpha x + (1-\alpha) a)}$$

ومنه $\forall x \in]0, a[\quad f'_a(x) < 0$

$\forall x \in]a, +\infty[\quad f'_a(x) > 0$

إذن f_a تناقصية قطعا على $]0, a]$ وتزايدية قطعا على $[a, +\infty[$

ب- الاستنتاج الأول

لدينا f_a تناقصية قطعا على $]0, a]$ ومنه

$$\forall x \in]0, a] \quad f_a(x) \geq f_a(a)$$

ولدينا f تزايدية قطعا على $[a, +\infty[$ ومنه

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad f_a(x) \geq f_a(a)$$

إذن $\forall x \in IR_+^* \quad f_a(x) \geq f_a(a)$

ولدينا

$$f_a(x) = \ln(\alpha a + (1-\alpha) a) - \alpha \ln a$$

$$= \ln a - \alpha \ln a$$

$$= (1-\alpha) \ln a$$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad f_a(x) \geq (1-\alpha) \ln a$

2- الاستنتاج الثاني

ليكن x و y عنصرين من IR_+^* . لدينا

$$\alpha x + (1-\alpha) y \geq x^{\alpha} y^{1-\alpha} \Leftrightarrow \ln(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \ln(x^{\alpha} y^{1-\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha x + (1-\alpha) y) - \alpha \ln x \geq (1-\alpha) \ln y$$

$$\Leftrightarrow f_{y}(x) \geq (1-\alpha) \ln y$$

وحسب السؤال الأول فإن العبارة الأخيرة صحيحة ومنه

$$\alpha x + (1-\alpha) y \geq x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

* * * *

12

احسب النهايات التالية :

1- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1 - x^2}{\cos x}\right)$

2- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos x}\right)$

3- $\lim_{x \to 0, x > 0} \sin x \cdot \ln x$

4- $\lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2}{x - 1}$

1- حساب النهاية الأولى

لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2}{\cos x} = 1$ ومنه $\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{1 - x^2}{\cos x}\right) = 0$

إذن لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من $]-1, 1[$

لدينا $\cos x > 0$ و $1 - x^2 > 0$ ومنه

$$\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1 - x^2}{\cos x}\right) = \frac{1}{x} (\ln(1 - x^2) - \ln(\cos x))$$

$$= \frac{\ln(1 - x^2)}{x} - \frac{\ln(\cos x)}{x}$$

إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة بما يلي

$$h(x) = \ln(1 - x^2)$$

نجد أن

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

ولدينا $\forall x \in]-1, 1[\quad h'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$

ومنه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x} = 0$$

ولدينا

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x) - \ln(\cos 0)}{x} = g'(0)$$

حيث g هي الدالة المعرفة بما يلي

$$\forall x \in]-1,1[\quad g(x) = \ln(\cos x)$$

ولدينا

$$\forall x \in]-1,1[\quad g'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$$

ومنه $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = 0$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1 - x^2}{\cos x}\right) = 0$

2- حساب النهاية الثانية

لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos x}$$

لدينا

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(f(x)) - \ln(f(0))}{x} = \ln'(f(0)) \cdot f'(0)$$

ليكن x عنصرا من]-1, 1[. لدينا

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

ومنه $f'(0) = 0$

إذن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos x}\right) = 0$

3- حساب النهاية الثالثة

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sin x \cdot \ln x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

4- حساب النهاية الرابعة

لدينا

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2 - (\ln 1)^2}{x - 1} = g'(1)$$

حيث g هي الدالة المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad g(x) = (\ln x)^2$$

لدينا $\forall x \in IR_+^* \qquad g'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

ومنه $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2}{x - 1} = 0$

* * * *

13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos x}\right)$$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2-أ- بين أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2} = -1$

ب- استنتج النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{1 - \cos x}$

3- حدد نهاية f في 0

1- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ \cos x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

لدينا $\forall x \in]-1, 1[\qquad \cos x > 0$

ومنه $x \in D \Leftrightarrow x \in]-1, 1[- \{0\}$

إذن $D =]-1, 1[- \{0\}$

2-أ- اثبات المتساوية المقترحة

نضع $X = 1 - x^2$ ويكون لدينا

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2} = \lim_{X \to 1} \frac{\ln X}{1 - X} = \lim_{\substack{X \to 1 \\ X < 1}} - \frac{\ln X - \ln 1}{X - 1} = -1$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$\frac{\ln(1 - x^2)}{1 - \cos x} = \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2} = -1$$

إذن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{1 - \cos x} = -\frac{1}{2}$

3- نهاية الدالة f في 0

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\ln\sqrt{1-x^2} - \ln(\cos x)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \ln(\cos x)\right)$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{1-\cos x} - \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}\right]$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{1-\cos x} = -\frac{1}{2}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x} = \lim\limits_{\substack{X\to 1\\ X<1}}\frac{\ln X}{1-X} = -1$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1)\right) = \frac{3}{8}$

* * * *

14

احسب النهايات التالية

1- $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 2x - \ln x)$

3- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + \ln(x^2+1))$

4- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1- حساب النهاية الأولى

لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة

ليكن x عنصرا من IR يخالف 1- . لدينا

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x^3+1} = \frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

لدينا $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$

ولدينا $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1} = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

إذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3+1} = 0$

2- حساب النهاية الثانية

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 2x - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x^2 - 2 - \frac{\ln x}{x}\right)$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - 2 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 2x - \ln x) = +\infty$

3- حساب النهاية الثالثة

ليكن x عنصرا من IR^*

$$x + \ln(x^2+1) = x + \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x + \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x + 2\ln(-x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x\left(1 - 2\cdot\frac{\ln(-x)}{-x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\ln(1+X) = 0$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 - 2\cdot\frac{\ln(-x)}{-x}\right) = -\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + \ln(x^2+1)) = -\infty$

4- حساب النهاية الرابعة

ليكن x عنصرا من IR_+^* . نضع $X = 1 + \frac{1}{x}$

لدينا $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{X-1}\ln X$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 1} -\frac{\ln X}{X-1} = -\ln'(1) = -1$

* * * *

15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = x - \ln(x^2+1)$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أنه مهما يكن x من D فإن

$$f(x) = x - 2\ln|x| - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

ج- استنتج نهايتي f عند محدات D

2- أ- بين أن f تزايدية قطعا على IR

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

3- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

ب- ارسم المنحنى (C)

1-أ- تحديد المجموعة D

لدينا $\forall x \in IR \quad x^2+1>0$

ومنه $D = IR$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من D. لدينا

$$f(x) = x - \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= x - \ln x^2 - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x - \ln |x|^2 - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x - 2\ln|x| - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

إذن $(\forall x \in D)\ f(x) = x - 2\ln|x| - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

ج- الاستنتاج

* ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-2\,.\,\frac{\ln x}{x}\right) = 1$

إذن $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2\,.\,\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* ليكن x عنصرا من IR_-^* لدينا

$$f(x) = x - 2\ln(-x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x\left(1+2\,.\,\frac{\ln(-x)}{-x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1+2\,.\,\frac{\ln(-x)}{-x}\right) = -\infty$$

إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2-أ- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$
$$= \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$
$$= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

إذن $f'(x) > 0 \quad \forall x \in IR - \{1\}$

ومنه f تزايدية قطعا على IR

ب- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3-أ- الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

* لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[1-2\,.\,\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] = 1$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\ln(x^2+1) = \lim_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$

إذن تقبل (C) اتجاها مقاربا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = x$

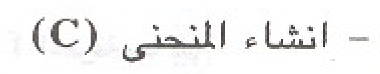
* لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

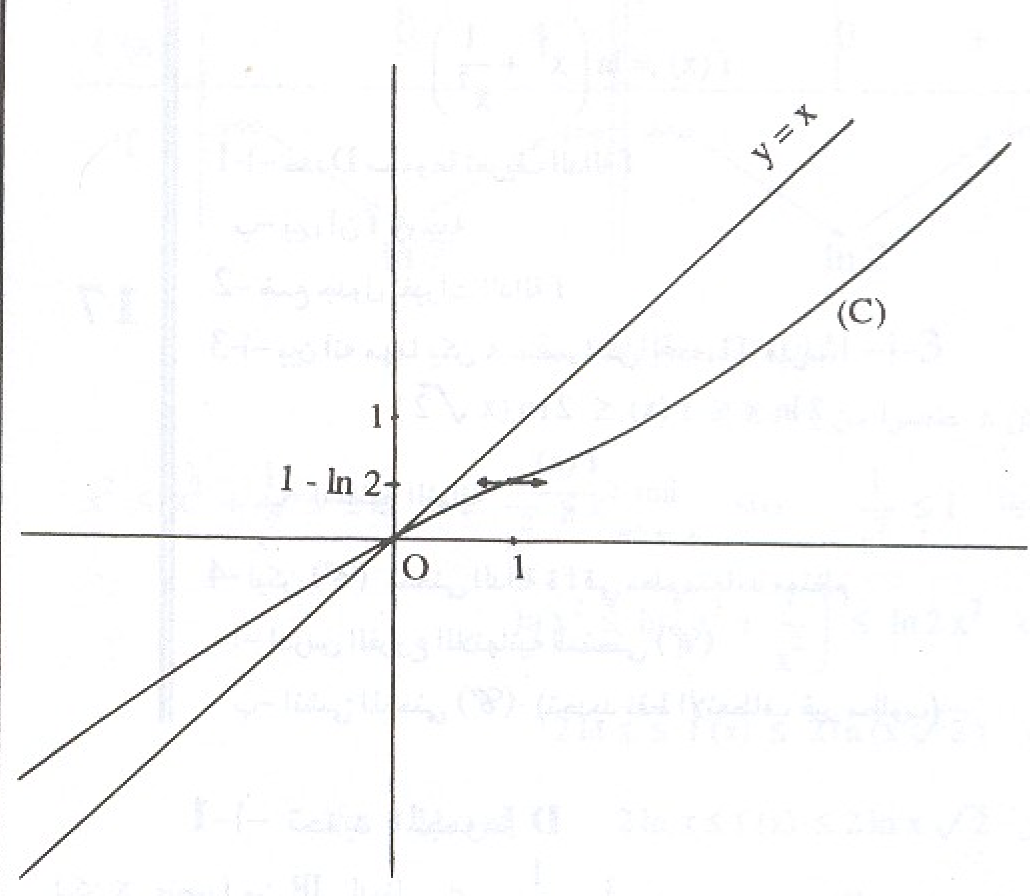
ولدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2\ln(-x)}{-x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$

إذن تقبل (C) اتجاها مقاربا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = x$





* * * *

16

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f(x) = x \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$f(0) = 0$$

1- ادرس اتصال واشتقاق f على اليمين في 0

2- أ- حدد الدالة المشتقة الثانية للدالة f

ب- ادرس منحنى تغيرات الدالة المشتقة للدالة f

ج- استنتج أن $f'(x) > 0 \quad \forall x \in IR_+^*$

3- ضع جدول تغيرات الدالة f

4- ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعلم ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C})$

ب- انشئ المنحنى $(\mathscr{C})$

1- اتصال الدالة f على اليمين في 0

لايمكن حساب نهاية f على اليمين في 0 مباشرة

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f(x) = x\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = x\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = x(\ln(x^2+1) - \ln x) = x\ln(x^2+1) - x\ln x$$

لدينا $\lim_{x \to 0} \ln(x^2+1) = \ln 1 = 0$ ومنه $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x^2+1) = 0$

لدينا $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

إذن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 = f(0)$

ومنه f متصلة على اليمين في 0.

1- اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

وبما أن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{x} = +\infty$ فإن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

2- أ- الدالة المشتقة الثانية للدالة f

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f'(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

ومنه

$$f''(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} + \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 - 1}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 1 + 4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

إذن

$$f''(x) = \frac{x^4 + 4x^2 - 1}{x(x^2+1)^2} \qquad \forall x \in IR_+^*$$

ب- منحنى تغيرات الدالة 'f

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f''(x) = \frac{x^4 + 4x^2 - 1}{x(x^2+1)} = \frac{(x^2+2)^2 - 5}{x(x^2+1)} = \frac{(x^2 + 2 + \sqrt{5})(x^2 + 2 - \sqrt{5})}{x(x^2+1)}$$

ومنه

$$f''(x) > 0 \iff x^2 + 2 - \sqrt{5} > 0 \iff x^2 > \sqrt{5} - 2 \iff x > \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

نضع $\alpha = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ ويكون لدينا : 'f تزايدية قطعا على $[\alpha, +\infty[$ وتناقصية قطعا على $]0, \alpha[$

ج- الاستنتاج

لدينا 'f تزايدية قطعا على $[\alpha, +\infty[$ ومنه

$$f'(x) \geq f'(\alpha) \qquad \forall x \in IR_+^*$$

ولدينا f' تناقصية قطعا على $]0,\alpha]$ ومنه

$$\forall x \in]0,\alpha] \qquad f'(x) \geq f'(\alpha)$$

ومنه $\quad f'(x) \geq f'(\alpha) \qquad \forall x \in IR_+^*$

لدينا

$$f'(\alpha) = \ln\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}$$

$$= \ln\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= \ln\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

لدينا $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ ومنه $\ln\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geq \ln 2$

وبما أن $\ln 2 > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (لأن $\ln 2 \approx 0,693$ و $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,236$)

فإن $\ln\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ أي $f'(\alpha) > 0$

إذن $\quad f'(x) > 0 \qquad \forall x \in IR_+^*$

3- جدول تغيرات الدالة f

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $f(0) = 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	0	↗ $+\infty$

4-أ- الفرع اللانهائي للمنحنى

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

إذن تقبل $(\mathscr{C})$ اتجاها مقاربا اتجاهه محور الاراتيب

ب- انشاء المنحنى $(\mathscr{C})$

* * * *

17

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

1-أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن f زوجية

2- ضع جدول تغيرات الدالة f

3-أ- بين أنه مهما يكن x عنصرا من $]1,+\infty[$ فإن
$2\ln x \leq f(x) \leq 2\ln(x\sqrt{2})$

ب- استنتج النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

4- ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$

ب- انشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ (تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \iff x^2 + \frac{1}{x^2} > 0 \iff x \neq 0$$

إذن $D = IR^*$

ب- الدالة f زوجية

لدينا D متماثل بالنسبة للصفر

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$f(-x) = \ln\left((-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2}\right) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = f(x)$$

إذن الدالة f زوجية

2- جدول تغيرات الدالة f

لدينا $\lim_{x \to +\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

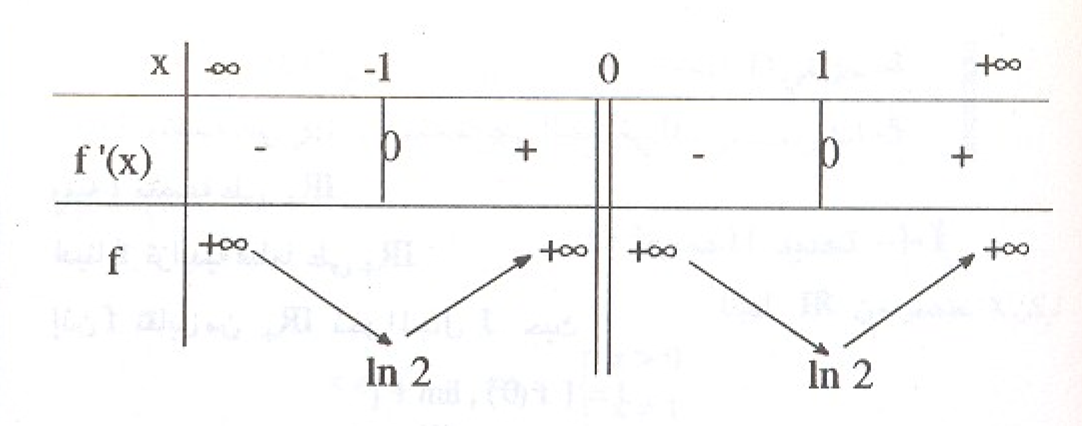
لدينا $\lim_{x \to 0}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ ومنه $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^4 + 1}{x^2}\right) = \ln(x^4 + 1) - \ln x^2 = \ln(x^4 + 1) - 2\ln x$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} - \frac{2}{x} = \frac{4x^4 - 2x^4 - 2}{x(x^4 + 1)} = 2 \cdot \frac{x^4 - 1}{x(x^4 + 1)}$$



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	‖	-	0	+	
f	$+\infty$	↘	ln 2	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	ln 2	↗	$+\infty$

3-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $[1,+\infty[$

لدينا $\frac{1}{x^2} \leq 1$ ومنه $\frac{1}{x^2} \leq x^2$ إذن $x^2 \leq x^2 + \frac{1}{x^2} \leq 2x^2$

ومنه $\ln x^2 \leq \ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln 2x^2$

أي $2\ln x \leq f(x) \leq 2\ln(x\sqrt{2})$

إذن $\forall x \in [1,+\infty[\quad 2\ln x \leq f(x) \leq 2\ln x\sqrt{2}$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in [1,+\infty[\quad \frac{2\ln x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 . \frac{\ln x\sqrt{2}}{x}$

ولدينا
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} . \sqrt{2}$$
$$= \lim_{X\to+\infty} \sqrt{2} . \frac{\ln X}{X}$$
$$= 0$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

4-أ- الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$

لدينا $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

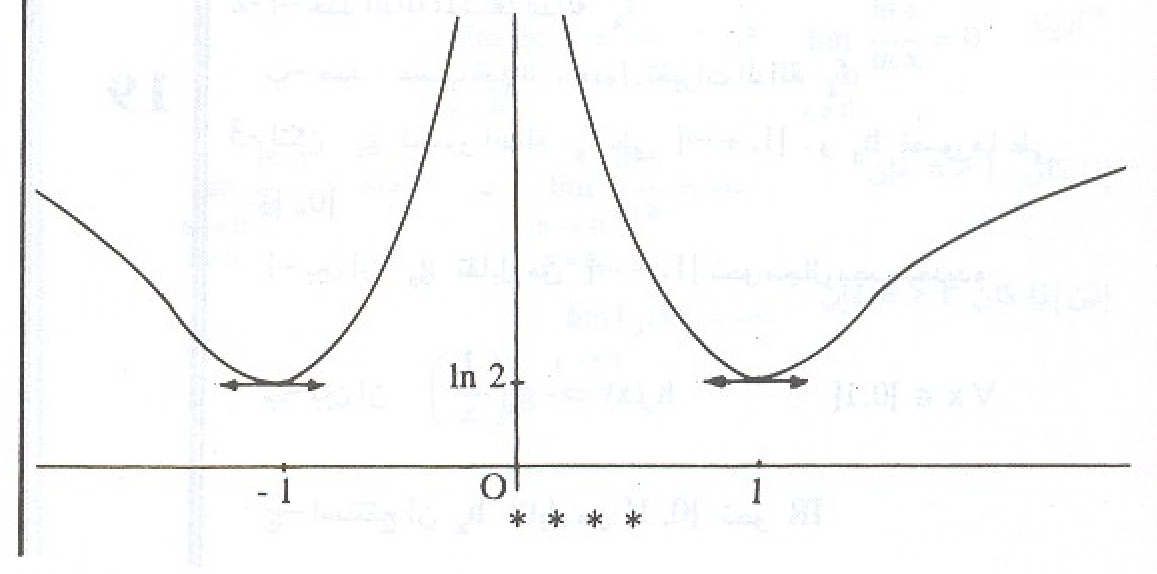
ومنه تقبل $(\mathscr{C})$ مستقيما متقاربا معادلته $x = 0$

* لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ومنه تقبل $(\mathscr{C})$ اتجاها مقاربا اتجاهه محور الافاصيل بجوار $+\infty$.

* وبما أن f زوجية فإن $(\mathscr{C})$ تقبل اتجاها مقاربا اتجاهه محور الافاصيل بجوار $-\infty$.

ب- انشاء المنحنى



* * * *

18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1-أ- ادرس اتصال الدالة f على اليمين في 0

ب- ادرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0.

ج- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ (يمكنك وضع $t = \frac{1}{x}$)

2-أ- بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا a :

$$\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) > \frac{1}{a+1}$$

(يمكنك تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة ln في المجال $[a,a+1]$).

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

3- ارسم المنحنى (C).

4-أ- بين أن f تقابل من IR^+ نحو مجال ينبغي تحديده

ب- حل في IR^+ المعادلة $f(x) = f^{-1}(x)$ (f^{-1} هي الدالة العكسية للدالة f).

من موضوع دورة مارس 1990

1-أ- اتصال الدالة f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$$
$$= x\ln(x+1) - x\ln x$$

لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$ و $\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$$
$$= f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في 0.

ب- قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$= \lim_{X\to+\infty} \ln X$$
$$= +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

ج- نهاية الدالة f عند $+\infty$

لدينا
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to 0\\t>0}} \frac{1}{t}\ln(1+t)$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\ln(1+t) - \ln(1+0)}{t - 0}$$

$$= \frac{1}{1+0}$$

$$= 1$$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن a عنصرا من IR_+^* . لدينا :

- الدالة $\ln$ متصلة على $[a,a+1]$
- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]a,a+1[$

وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\ln(a+1) - \ln a = \ln'(\alpha) \qquad \exists\, \alpha \in [a,a+1[$$

أي

$$\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{1}{\alpha} \qquad \exists\, \alpha \in]a, a+1[$$

لدينا $\alpha < a+1$ ومنه $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{a+1}$ إذن

$$\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) > \frac{1}{a+1}$$

ب- تغيرات الدالة f

لدينا x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

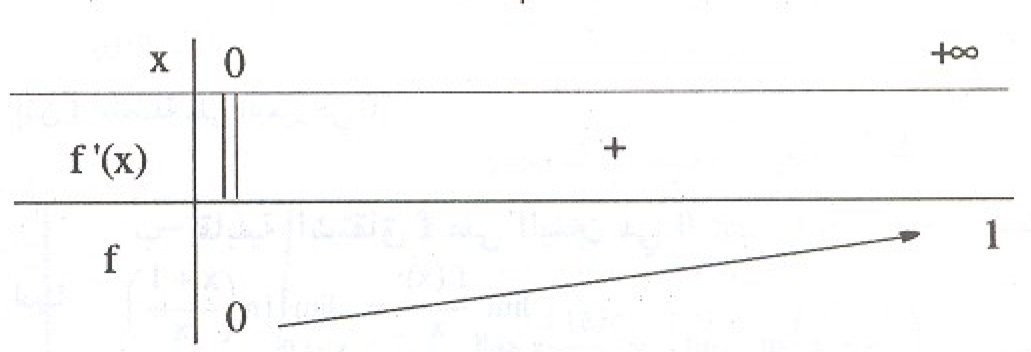
ومنه

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

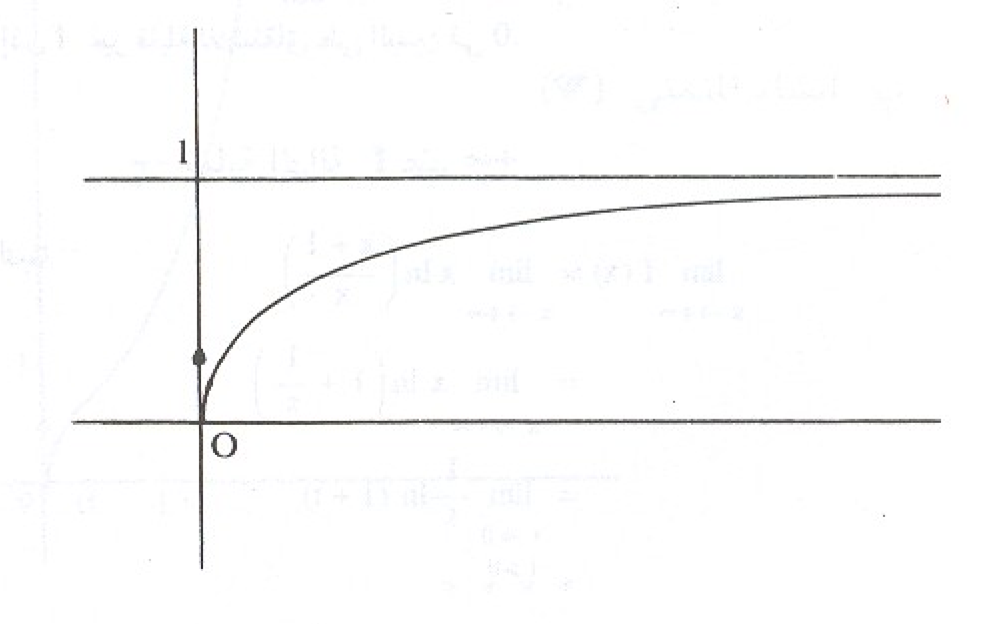
$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f'(x) > 0$$



3- انشاء المنحنى (C)



4-أ- التقابل

لدينا f متصلة على IR_+^* و f متصلة على اليمين في 0

ومنه f متصلة على IR_+

لدينا f تزايدية قطعا على IR_+

إذن f تقابل من IR_+ نحو المجال J حيث

$$J = [\, f(0) , \lim_{+\infty} f\, [$$

$$= [0 , 1[$$

ب- حل المعادلة المقترحة

بما أن f^{-1} معرفة على $[0, 1[$ فإن هذه المعادلة معرفة على $[0, 1[$

ليكن x عنصرا من $[0, 1[$. نعتبر النقطتين $M(x, f(x))$ و $M'(x, f^{-1}(x))$

لدينا M نقطة من (C) و M' نقطة من منحنى الدالة f^{-1}

وبما أن (C) هي مماثلة منحنى f^{-1} بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

فإن

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow M = M'$$

$$\Leftrightarrow M \in (\Delta)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x$$

إذا كان $x \neq 0$ فإن

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e-1}$$

إذا كان $x = 0$ فإن $f(0) = f^{-1}(0)$ لأن $f(0) = 0$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي

$$S = \left\{0 , \frac{1}{e-1}\right\}$$

* * * *

19

ليكن a عنصرا من $]0, +\infty[- \{1\}$ نعتبر الدالة العددية f_a المعرفة بمايلي $f_a(x) = \ln_a(x) - \ln_x(a)$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f_a

ب- حدد نهايات f_a عند محدات D ، حسب قيم a .

2- أ- حدد الدالة المشتقة للدالة f_a

ب- حدد ، حسب قيم a ، جدول تغيرات الدالة f_a

3- لتكن g_a قصور الدالة f_a على $]1, +\infty[$. و h_a قصورها على $]0, 1[$

أ- بين أن g_a تقابل من $]1, +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

ب- بين أن $h_a(x) = -g_a\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \forall x \in]0,1[$

ج- استنتج أن h_a تقابل من $]0, 1[$ نحو IR

4- حل في D المعادلة $f_a(x)=0$

5- انشئ منحني الدالتين f_2 و $f_{1/2}$

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصر من IR لدينا

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$$

إذن $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$

ب- نهايات الدالة f_a عند محدات D .

لدينا $\forall x\in D \quad f_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}-\frac{\ln a}{\ln x}$

* لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln x=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a}{\ln x}=0$

إذا كان $a>1$ فإن $\ln a>0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln a}=+\infty$

إذا كان $a<1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln a}=-\infty$

إذن إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)=+\infty$

إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)=-\infty$

* لدينا $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln a}=0$

إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{\ln a}{\ln x}=+\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{\ln a}{\ln x}=-\infty$

ومنه إذا كان $a>1$:

$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f_a(x)=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f_a(x)=+\infty$

وبالمثل لدينا إذا كان $0<a<1$ فإن

$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f_a(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f_a(x)=-\infty$

* لدينا $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln a}{\ln x}=0$ لأن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$

إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{\ln a}=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{\ln a}=+\infty$

إذن إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f_a(x)=-\infty$

وبالمثل لدينا إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f_a(x)=+\infty$

2-أ- الدالة المشتقة للدالة f_a

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$f_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}-\frac{\ln a}{\ln x}$$

ومنه

$$f_a'(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}-\ln a\left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln a}+\frac{\ln a}{(\ln x)^2}\right)$$

$$=\frac{(\ln x)^2+(\ln a)^2}{x\ln a\,(\ln x)^2}$$

ب- جدول تغيرات الدالة f_a

ليكن x عنصرا من D . حسب السؤال السابق لدينا اشارة $f_a(x)$ هي اشارة lna

الحالة الأولى : $a>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_a'(x)$		+	‖	+	
f_a	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الحالة الثانية : $0<a<1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_a'(x)$		+	‖	+	
f_a	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3-أ- التقابل g_a

لدينا g_a متصلة على $]1,+\infty[$

لدينا g_a رتيبة قطعا على $]1,+\infty[$ لأنه

إذا كان $a>1$ فإن g_a تزايدية قطعا على $]1,+\infty[$

إذا كان $0<a<1$ فإن g_a تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$

لدينا إذا كان $a>1$ فإن

$$g_a(]1,+\infty[)=]\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f,\lim_{+\infty}f[$$

$$=]-\infty,+\infty[$$

وبالمثل لدينا $g_a(]1,+\infty[)=IR$ إذا كان $0<a<1$

إذن g_a تقابل من $]1,+\infty[$ نحو IR

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]0,1[$. لدينا $1<\frac{1}{x}$ ومنه

$$g_a\left(\frac{1}{x}\right) = f_a\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln a}{\ln x}$$

$$= -f_a(x)$$

$$= -h_a(x)$$

إذن $\forall x \in]0,1[\quad h_a(x) = -g_a\left(\frac{1}{x}\right)$

ج- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in]0,1[\quad h_a(x) = -g_a\left(\frac{1}{x}\right)$

أي $h_a = -g_a \circ \varphi$

حيث φ هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$]0,1[\longrightarrow]1,+\infty[$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

لدينا φ تقابل من $]0, 1[$ نحو $]1, +\infty[$ و g_a تقابل من $]1, +\infty[$ نحو IR

ومنه $g_a \circ \varphi$ تقابل من $]0, 1[$ نحو IR

إذن h_a تقابل من $]0, 1[$ نحو IR

4- حل المعادلة المقترحة

ليكن x عنصرا من D

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = (\ln a)^2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln a \text{ أو } \ln x = -\ln a$$

$$\Leftrightarrow x = a \text{ أو } \ln x = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

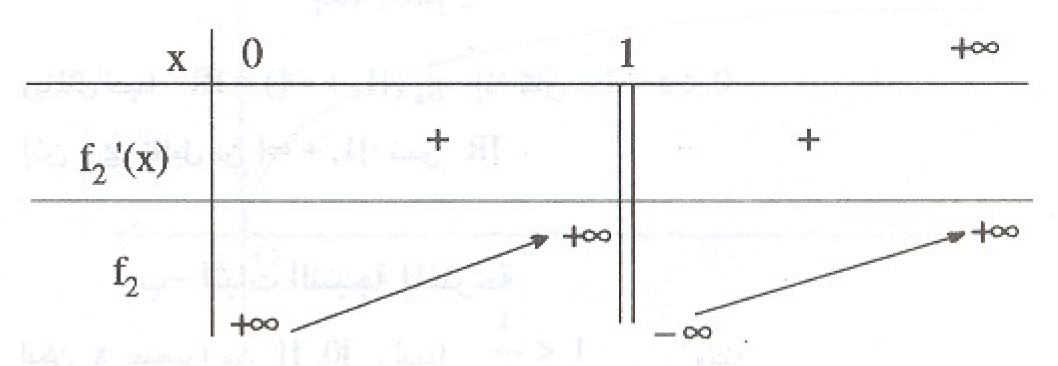
$$\Leftrightarrow x = a \text{ أو } x = \frac{1}{a}$$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي

$$S = \{a, \frac{1}{a}\}$$

5- انشاء المنحنيين

* جدول تغيرات f_2



* لدينا $\lim_{x \to 1} |f_2(x)| = +\infty$ ومنه منحنى f_2 تقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 1$

لدينا $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_2(x) = -\infty$ ومنه منحنى f_2 يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 0$

* لدينا $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$

ولدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x \ln 2} - \frac{\ln 2}{\ln x}\right) = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

ومنه منحنى f_2 يقبل اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأراتيب

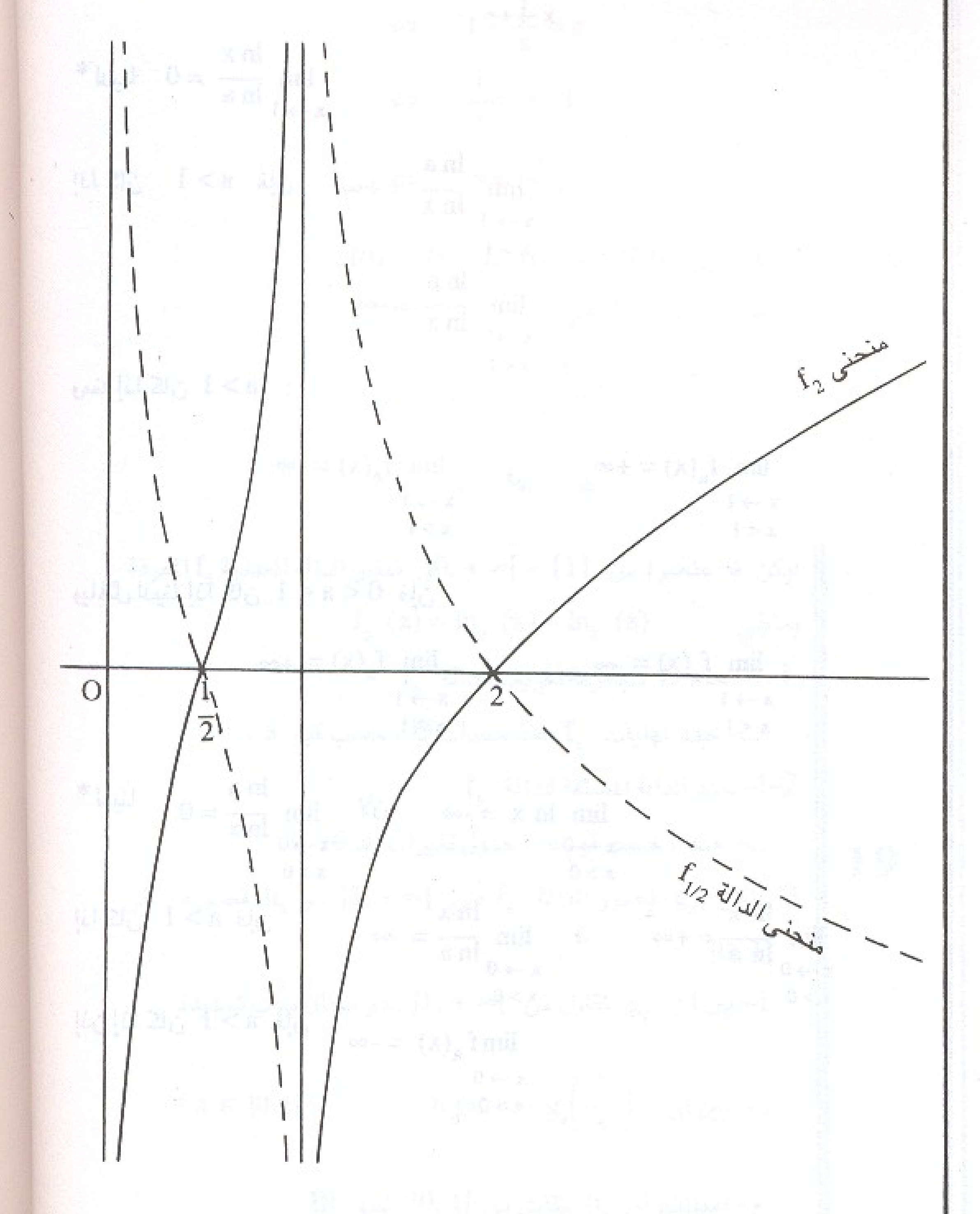
* ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\ln x}{\ln\frac{1}{2}} - \frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln x}$$

$$= -\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{\ln x}$$

$$= -f_2(x)$$

إذن منحنى الدالة $f_{1/2}$ هو صورة منحنى f_2 بالتماثل المتعامد الذي محوره محور الأفاصيل.



6 الدوال الأسية

- الدالة الأسية النبيرية
- دراسة الدالة الأسية النبيرية
- الدوال الأصلية للدوال $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$
- نهايات هامة
- الدالة الأسية للأساس a
- دراسة دوال مركبة من الدوال الأسية

1

1- حل في IR المعادلتين التاليتين

أ- $e^{2x} - e^{x} - 4 + 4\,e^{-x} = 0$

ب- $e^{-5x} + e^{-3x} - 2\,e^{-x} = 0$

2- حل في IR المتراجحتين التاليتين

أ- $-e^{2x} + 3\,e^{x} - 2 > 0$

ب- $4^{x-1} - 3\,.\,2^{x-1} > 0$

1-أ- حل المعادلة الأولى

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$e^{2x} - e^{x} - 4 + 4\,e^{-x} = e^{2x} - e^{x} - 4 + \frac{4}{e^{x}}$$

$$= \frac{1}{e^{x}}\,(e^{3x} - e^{2x} - 4\,e^{x} + 4)$$

$$= \frac{1}{e^{x}}\,[\,(e^{x})^{3} - (e^{x})^{2} - 4\,(e^{x} - 1)]$$

$$= \frac{1}{e^{x}}\,(e^{x} - 1)\,((e^{x})^{2} - 4)$$

$$= e^{-x}\,(e^{x} - 1)(e^{x} - 2)\,(e^{x} + 2)$$

بما أن $e^{-x} > 0$ و $e^{x} + 2 > 0$ فإن

$$e^{2x} - e^{x} - 4 + 4\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (e^{x} - 1)\,(e^{x} - 2) = 0$$

$\Leftrightarrow e^{x} = 1$ أو $e^{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x = \ln 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة الأولى هي

$$S_1 = \{0, \ln 2\}$$

ب- حل المعادلة الثانية

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$e^{-5x} + e^{-3x} - 2\,e^{-x} = (e^{-x})^{5} + (e^{-x})^{3} - 2\,e^{-x}$$

$$= e^{-x}\,((e^{-x})^{4} + (e^{-x})^{2} - 2)$$

$$= e^{-x}\,((e^{-2x})^{2} + e^{-2x} - 2)$$

$$= e^{-x}\,(e^{-2x} - 1)\,(e^{-2x} + 2)$$

وبما أن $e^{-x} > 0$ و $e^{-2x} + 2 > 0$ فإن

$$e^{-5x} + e^{-3x} - 2\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة الثانية هي $S_2 = \{0\}$

2-أ- حل المتراجحة الأولى

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$-e^{2x} + 3e^{x} - 2 = -\,((e^{x})^{2} - 3\,e^{x} + 2)$$

$$= -\,(e^{x} - 1)\,(e^{x} - 2)$$

ومنه

$$-e^{2x} + 3e^{x} > 2 \Leftrightarrow -\,(e^{x} - 1)(e^{x} - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{x} - 1)\,(e^{x} - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < e^{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow \ln 1 < x < \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة الأولى هي

$$T_1 =]0, \ln 2[$$

ب- حل المتراجحة الثانية

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$4^{x-1} - 3\,.\,2^{x-1} + 2 = (2^{2})^{x-1} - 3.2^{x-1} + 2$$

$$= (2^{x-1})^{2} - 3(2^{x-1}) + 2$$

$$= (2^{x-1} - 1)\,(2^{x-1} - 2)$$

ومنه

$$4^{x-1} - 3.2^{x-1} + 2 > 0 \Leftrightarrow (2^{x-1} - 1)\,(2^{x-1} - 2) > 0$$

$\Leftrightarrow 2^{x-1} < 1$ أو $2^{x-1} > 2$

$\Leftrightarrow x - 1 < 0$ أو $x - 1 > 1$

إذن مجموعة حلولها هي $T_2 =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

* * * *

2

1- حل في IR المعادلة التالية

$$e^{3x} - 3\,e^{2x} + 2 = 0$$

2- استنتج حلول النظمة التالية

$$\begin{cases} e^{x+2y} = 2 \\ e^{x} + e^{y} = 3 \end{cases}$$

1- حل المعادلة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$e^{3x} - 3\,e^{2x} + 2 = (e^{x})^{3} - 3\,(e^{x})^{2} + 2$$

$$= (e^{x})^{3} - 1 - 3\,((e^{x})^{2} - 1)$$

$$= (e^{x} - 1)\,(e^{2x} + e^{x} + 1) - 3(e^{x} - 1)\,(e^{x} + 1)$$

$$= (e^{x} - 1)\,(e^{2x} + e^{x} + 1 - 3\,e^{x} - 3)$$

$$= (e^{x} - 1)\,(e^{2x} - 2\,e^{x} - 2)$$

ولدينا

$$e^{2x} - 2\,e^{x} - 2 = (e^{x})^{2} - 2\,e^{x} - 2$$

$$= (e^{x} - 1)^{2} - 3$$

$$= (e^{x} - 1 - \sqrt{3})\,(e^{x} - 1 + \sqrt{3})$$

ومنه

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 2 = (e^{x} - 1)\,(e^{x} - 1 - \sqrt{3})\,(e^{x} - 1 + \sqrt{3})$$

إذن $e^{3x} - 3\,e^{2x} + 2 = 0$ يكافئ

$e^{x} - 1 = 0$ أو $e^{x} = 1 + \sqrt{3}$ أو $e^{x} = 1 - \sqrt{3}$

بما أن $1 - \sqrt{3} < 0$ فإن $e^{3x} - 3\,e^{2x} + 2 = 0$ تكافئ

$e^{x} - 1 = 0$ أو $e^{x} = 1 + \sqrt{3}$

أي $x = 0$ أو $x = \ln(1 + \sqrt{3})$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي

$$S = \{0, \ln(1 + \sqrt{3})\}$$

2- الاستنتاج

ليكن (x, y) عنصرا من IR^2 . لدينا

$$\begin{cases} e^{x+2y} = 2 \\ e^{x} + e^{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\,y = \ln 2 \\ e^{x} + e^{y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 - 2y \\ e^{\ln 2 - 2y} + e^y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 - 2y \\ e^{\ln 2} + e^y \cdot e^{2y} = 3e^{2y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 - 2y \\ e^{3y} - 3e^{2y} + 2 = 0 \end{cases}$$

وحسب السؤال الأول يكون لدينا

$$\begin{cases} e^{x+2y} = 2 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 - 2y \\ y \in S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = \ln 2 - 2\ln(1+\sqrt{3}) \\ y = \ln(1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

لدينا

$$\ln 2 - 2\ln(1+\sqrt{3}) = \ln 2 - \ln(1+\sqrt{3})^2$$
$$= \ln 2 - \ln(4+2\sqrt{3})$$
$$= \ln \frac{2}{4+2\sqrt{3}}$$
$$= \ln \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$= \ln(2-\sqrt{3})$$

إذن مجموعة حلول هذه النظمة هي

$$S' = \{(\ln 2, 0), (\ln(2-\sqrt{3}), \ln(1+\sqrt{3}))\}$$

* * * *

3

حل في IR^2 النظمتين التاليتين

-1 $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 4 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases}$

-2 $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$

-1 حل النظمة الأولى

ليكن (x, y) عنصرا من IR^2 لدينا

$$\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 4 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x - 3e^y = 4 \\ 3e^x + 3e^y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5e^x = 13 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{13}{5} \\ e^y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(\frac{13}{5}\right) \\ y = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول النظمة الأولى هي

$$S = \left\{\left(\ln\left(\frac{13}{15}\right), \ln\left(\frac{2}{5}\right)\right)\right\}$$

-2 حل النظمة الثانية

ليكن (x, y) عنصرا من IR^2 لدينا

$$\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cdot e^y = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$$

نعتبر المعادلة التالية $X^2 - 4X + 3 = 0$

لدينا 1 و 3 هما جذرا هذه المعادلة ومنه

$$\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (e^x, e^y) \in \{(1, 3), (3, 1)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 3 \\ e^y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} e^x = 1 \\ e^y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y = \ln 3 \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول النظمة الثانية هي

$$S' = \{(0, \ln 3), (\ln 3, 0)\}$$

* * * *

4

نعتبر الدالتين العدديتين sh و ch المعرفتين بمايلي

$$sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

-1 بين أنه مهما يكن x من IR فإن

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$

-2 بين أنه مهما يكن x من IR فإن

$$ch'(x) = sh(x)$$

-3 ليكن x و y عنصرين من IR

أ- بين أن $ch(x+y) = ch\,x\,ch\,y + sh\,x\,sh\,y$

ب- بين أن $sh(x+y) = ch\,x\,sh\,y + sh\,x \cdot ch\,y$

-1 اثبات النتيجة الأولى

ليكن x عنصرا من IR

لدينا

$$ch^2(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$$

$$sh^2(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)$$

ومنه

$$ch^2(x) - sh^2(x) = \frac{1}{4}(2+2)$$
$$= 1$$

إذن $\forall x \in IR \quad ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

-2 اثبات النتيجة الثانية

ليكن x عنصرا من IR

لدينا

$$ch'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$= sh'(x)$$

إذن $\forall x \in IR \quad ch'(x) = sh(x)$

3-أ- اثبات المتساوية الأولى

لدينا $\text{ch}(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)})$

$= \frac{1}{2}(e^{x} . e^{y} + e^{-x} . e^{-y})$

ولدينا $\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\ \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$

$= \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})(e^{y} + e^{-y})$

$= \frac{1}{4}(e^{x} e^{y} + e^{-x} . e^{-y} + e^{x}. e^{-y} + e^{-x}. e^{y})$

$= \frac{1}{4}(2\,\text{ch}(x+y) + e^{x} . e^{-y} + e^{-x} . e^{y})$

$= \frac{1}{2}\text{ch}(x+y) + \frac{1}{4}(e^{x}. e^{-y} + e^{-x}. e^{y})$

ولدينا $\text{ch}\, x\, \text{sh}\, y = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})(e^{y} - e^{-y})$

$= \frac{1}{4}(e^{x} . e^{y} + e^{-x} . e^{-y} - e^{-x}. e^{y} - e^{x} e^{-y})$

$= \frac{1}{2}\text{ch}(x+y) - \frac{1}{4}(e^{x} . e^{-y} + e^{x} e^{-y})$

إذن $\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y = \text{ch}(x+y)$

ب- اثبات المتساوية الثانية

لدينا $\text{sh}(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)})$

$= \frac{1}{2}(e^{x} . e^{y} - e^{-x} . e^{-y})$

ولدينا $\text{sh}\, x\, \text{ch}\, y = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})(e^{y} + e^{-y})$

$= \frac{1}{4}(e^{x} e^{y} - e^{-x}. e^{-y} + e^{x} . e^{-y} - e^{-x} e^{y})$

$= \frac{1}{4}(2\,\text{sh}(x+y) + e^{x} . e^{-y} - e^{-x} . e^{y})$

$= \frac{1}{2}\text{sh}(x+y) + \frac{1}{4}(e^{x} e^{-y} - e^{-x} . e^{y})$

ولدينا $\text{ch}\, x\, \text{sh} y = \frac{1}{2}\text{s h}(x+y) + \frac{1}{4}(e^{y} e^{-x} - e^{-y} e^{x})$

ومنه $\text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{ch}\, x.\ \text{sh}\, y = \text{sh}(x+y)$

* * * *

5

لتكن f دالة عددية f قابلة للاشتقاق على IR بحيث

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) f(y)$

$f(0) \neq 0$

1- أحسب $f(0)$

2- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(0) f(x)$

3- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$

4- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{x f'(0)}$

1- حساب القيمة f(0)

لدينا $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) f(y)$

ومنه $f(0+0) = f(0) f(0)$ أي $f(0) = (f(0))^2$

وبما أن $f(0) \neq 0$ فإن $f(0) = 1$

2- اثبات النتيجة الأولى

ليكن x عنصرا من IR

لدينا $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ولدينا $f(x+h) = f(x) f(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}$ ومنه

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) f(h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} f(x) . \frac{f(h) - 1}{h}$

ولدينا $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

$= f'(0)$

إذن $f'(x) = f(x) f'(0)$

وبالتالي فإن $f'(x) = f(x) f'(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3- اثبات النتيجة الثانية

لدينا $f(x+y) = f(x) f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

ومنه $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

إذن $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

نفترض أن $f(\alpha) = 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}$

ولدينا $f(0) = f(\alpha - \alpha)$

$= f(\alpha) f(-\alpha)$

$= 0$

وهذا غير ممكن إذن $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4- الاستنتاج

لدينا $f'(x) = f'(0) f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ومنه $\frac{f'(x)}{f(x)} = f'(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

لدينا $\frac{f'}{f}$ هي الدالة المستقة للدالة $\ln f$

$f'(0)$ هي الدالة المستقة للدالة $x \mapsto f'(0)\, x$

إذن $\ln f(x) = f'(0)x + \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$

وبما أن $f(0) = 1$ و $\ln f(0) = 0$ فإن $\alpha = 0$

ومنه $\ln f(x) = f'(0)x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

إذن $f(x) = e^{x f'(0)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* * * *

6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$f(x) = x^n e^{-x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

حيث n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

1- ادرس رتابة الدالة f

2- استنتج أن $\forall x \in]0, +\infty[\quad e^x > \left(\frac{x}{n}\right)^n$

1- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا

$$f'(x) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$
$$= x^{n-1} e^{-x} (n - x)$$

إذن $\forall x \in]0, n[\quad f'(x) > 0$

$\forall x \in]n, +\infty[\quad f'(x) < 0$

ومنه f تزايدية قطعا على $]0, n]$ وتناقصية قطعا على $[n, +\infty[$

2- الاستنتاج

لدينا f تزايدية قطعا على $]0, n]$ ومنه

$\forall x \in]0, n[\quad f(x) < f(n)$

لدينا f تناقصية قطعا على $[n, +\infty[$ ومنه

$\forall x \in]n, +\infty[\quad f(x) < f(n)$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) \le f(n)$

أي $\forall x \in]0, +\infty[\quad x^n e^{-x} \le n^n e^{-n}$

بمعنى أن $\forall x \in]0, +\infty[\quad \left(\frac{x}{n}\right)^n \le e^x \cdot e^{-n}$

وبما أن $n \in IN^*$ فإن $e^{-n} < 1$ ومنه

$\forall x \in]0, +\infty[\quad e^x \cdot e^{-n} < e^x$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad \left(\frac{x}{n}\right)^n \le e^x$

* * * *

7

ليكن n عنصرا من IN^* . نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بمايلي :

$\forall x \in IR \quad g(x) = \exp\left(\frac{x^2}{n}\right) - 1 - \frac{x^2}{n}$

$\forall x \in IR \quad h(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) - 1 + \frac{x^2}{n}$

حيث exp هي الدالة الأسية التي أسها e

1- أ- ادرس رتابة الدالة $g - h$

ب- استنتج أن $h(x) \le g(x) \quad \forall x \in IR$

2- أ- بين أن $0 \le h(x) \quad \forall x \in IR$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $[0, \sqrt{n}]$ فإن

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \le \exp(-x^2) \le \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

1-أ- رتابة الدالة g − h

الدالة $g - h$ قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR . لدينا $(g-h)'(x) = g'(x) - h'(x)$

$$= \left(\frac{2x}{n}\exp\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{2x}{n}\right) - \left(-\frac{2x}{n}\exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) + \frac{2x}{n}\right)$$
$$= \frac{2x}{n}\left(\exp\left(\frac{x^2}{n}\right) + \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) - 2\right)$$

لدينا $\exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) = \dfrac{1}{\exp\left(\frac{x^2}{n}\right)}$

ومنه $\exp\left(\frac{x^2}{n}\right) + \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) - 2 = \dfrac{\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2 - 2\exp\left(\frac{x^2}{n}\right) + 1}{\exp\left(\frac{x^2}{n}\right)}$

إذن $(g-h)'(x) = \dfrac{\frac{2x}{n}}{\exp\left(\frac{x^2}{n}\right)}\left(\exp\left(\frac{x^2}{n}\right) - 1\right)^2$

ومنه $\forall x \in IR+ \quad (g-h)'(x) \ge 0$

$\forall x \in IR- \quad (g-h)'(x) \le 0$

وهذا يعني أن $g - h$ تزايدية قطعا على IR^+ وتناقصية قطعا على IR^-

ب- الاستنتاج

ومنه $(g-h)(x) \ge (g-h)(0) \quad \forall x \in IR$

ولدينا $g(0) = \exp(0) - 1 = 0$ و $h(0) = 0$

إذن $(g-h)(x) \ge 0 \quad \forall x \in IR$

أي $g(x) \ge h(x) \quad \forall x \in IR$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

الدالة h قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$h'(x) = -\frac{2x}{n}\exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) + \frac{2x}{n}$$
$$= \frac{2x}{n}\left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right)\right)$$

لدينا $-\frac{x^2}{n} \le 0$ ومنه $\exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) \le \exp(0)$

أي $1 - \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) \ge 0$

إذن $h'(x) \ge 0 \quad \forall x \in IR^+$ و $h(x) \le 0 \quad \forall x \in IR^-$

ومنه h تزايدية قطعا على IR^+ وتناقصية قطعا على IR^-

إذن $h(0) \le h(x) \quad \forall x \in IR$

أي $0 \le h(x) \quad \forall x \in IR$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $[0, \sqrt{n}]$

لدينا $h(x) \ge 0$ أي $1 - \frac{x^2}{n} \le \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right)$

وبما أن $0 \le x \le \sqrt{n}$ فإن $1 - \frac{x^2}{n} \ge 0$ ومنه

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \le \left(\exp\left(-\frac{x^2}{n}\right)\right)^n$$

أي $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \le \exp(-x^2)$

لدينا $h(x) \le g(x)$ و $0 \le h(x)$ ومنه $0 \le g(x)$

أي $\exp\left(\frac{x^2}{n}\right) \ge 1+\frac{x^2}{n}$

ومنه $\exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) \le \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{n}}$

إذن $\exp(-x^2) \le \dfrac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$

وبالتالي فإن $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \le \exp(-x^2) \le \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$

* * * *

8

حدد النهايات التالية

-1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{e^x-1}$

-2 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(e^{2x}-1)$

-3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

-4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$

1- حساب النهاية الأولى

لدينا
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{e^x-1} = 1 \,.\, 1 = 1$$

لأن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

2- حساب النهاية الثانية

ليكن x عنصرا من IR^+ . نضع $X = e^{2x}-1$

ومنه $2x = \ln(X+1)$ إذن

$$x\ln(e^{2x}-1) = \frac{\ln(X+1)}{2}\ln X = \frac{1}{2}\,\frac{\ln(X+1)}{X}\,.\,X\ln X$$

إذن
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(e^x-1) = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(X+1)}{X}\,.\,X\ln X = 0$$

لأن $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} X\ln X = 0$

3- حساب النهاية الثالثة

ليكن x عنصرا من IR^* . لدينا

$$\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \frac{e^x-1}{x} - \frac{e^{-x}-1}{x}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{X\to 0} -\frac{e^X-1}{X} = -1$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x} = 2$

4- حساب النهاية الرابعة

ليكن x عنصرا من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا

$$\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

ولدينا
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x} = 1$

* * * *

9

-1 ليكن n عنصرا من IN^*

احسب $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x$ (يمكنك وضع $x = nt$)

-2 ليكن r عددا جذريا موجبا قطعا.

أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{x^r}\right)$

ب- استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^r}$

-3 أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

ب- استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$

1- حساب النهاية الأولى

ليكن x عنصرا من IR^- . بوضع $x = nt$ يكون لدينا

$$x^n e^x = (nt)^n e^{nt} = n^n t^n (e^t)^n = n^n (t\,e^t)^n$$

ولدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{t \to -\infty} n^n (t e^t)^n$

$= 0$

علما أن $\lim\limits_{t \to -\infty} t e^t = 0$

2-أ- حساب النهاية الثانية

ليكن x عنصرا من IR^+ . لدينا

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right) = \ln (e^x) - \ln x^r$$
$$= x - r \ln x$$
$$= x\left(1 - r . \frac{\ln x}{x}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right) = +\infty$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR^+ . لدينا.

$$\frac{e^x}{x^r} = \exp\left(\ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right)\right)$$

حيث exp هي الدالة الأسية للأساس e

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right) = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$$

3-أ- حساب النهاية الثالثة

ليكن x عنصرا من IR_+^* نضع $t = \frac{1}{x}$ ويكون لدينا

$$x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{t} \ln (1+t)$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\ln (1+t)}{t}$$
$$= 1$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e^1$$
$$= e$$

* * * *

10

احسب النهايات التالية :

-1 $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln (e^{2x} - 1)$

-2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - 2e^x}{1 + 2xe^x}$

-3 $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x^2}})$

1- حساب النهاية الأولى

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا $x = \ln e^x$

ومنه $x - \ln (e^{2x} - 1) = \ln e^x - \ln (e^{2x} - 1)$

$$= \ln\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right)$$

إذن

$$\lim_{x \to +\infty} x - \ln (e^{2x} - 1) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right)$$
$$= \lim_{X \to +\infty} \ln\left(\frac{X}{X^2 - 1}\right)$$
$$= -\infty$$

لأن $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{X^2 - 1} = 0$

2- حساب النهاية الثانية

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2e^x}{1 + 2xe^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} + 2x}$$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} - 2) = -2$$
$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + 2x) = +\infty$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2e^x}{1 + 2xe^x} = 0$$

3- حساب النهاية الثالثة

ليكن x عنصرا من IR_-^* . نضع $X = \frac{1}{x}$ ويكون لدينا

$$x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x^2}}) = \frac{1}{X^2} (e^X - e^{X^2})$$
$$= \frac{e^X - e^{X^2}}{X} \cdot \frac{1}{X}$$

ولدينا

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x^2}}) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{e^X - e^{X^2}}{X} \cdot \frac{1}{X}$$

ولدينا

$$\lim_{X \to 0} \frac{e^X - e^{X^2}}{X} = \lim_{X \to 0} \frac{g(X) - g(0)}{X}$$
$$= g'(0)$$

حيث g هي الدالة المعرفة بما يلي $g(X) = e^X - e^{X^2}$

ولدينا $\quad g'(x) = e^{x} - 2\,x\,e^{x^2} \qquad \forall\, x \in IR$

ومنه $\quad \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^{X} - e^{X^2}}{X} = 1$

وبما أن $\quad \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \dfrac{1}{X} = -\infty \quad$ فإن

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$$

* * * *

11

ليكن α و β عددين حقيقيين موجبين قطعا. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}}$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- حدد نهاية $\ln f$ عند $+\infty$

ج- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

2- حدد النهاية التالية $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta}$

1-أ- مجموعة تعريف الدالة f

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

إذن $\quad D =]1, +\infty[$

ب- نهاية الدالة ln f عند $+\infty$

لدينا $\quad \forall\, x \in D \quad f(x) > 0$

ليكن x عنصرا من D. لدينا

$$\ln f(x) = \ln \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}}$$

$$= \ln (\ln x)^{\beta} - \ln x^{\alpha}$$

$$= \beta \ln (\ln x) - \alpha \ln x$$

$$= \ln x \left(\beta \frac{\ln (\ln x)}{\ln x} - \alpha\right)$$

لدينا $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln (\ln x)}{\ln x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

ومنه $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\beta \dfrac{\ln (\ln x)}{\ln x} - \alpha\right) = -\alpha$

وبما أن $-\alpha < 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \ln f(x) = -\infty$$

ج- الاستنتاج

لدينا $\quad f(x) = e^{\ln f(x)} \qquad \forall\, x \in D$

وبما أن $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln f(x) = -\infty \quad$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to -\infty} e^{X}$$

$$= 0$$

2- تحديد النهاية الأخيرة

لدينا $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{1}{t}\right)^{\alpha} \left|\ln \dfrac{1}{t}\right|^{\beta}$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha} |-\ln t|^{\beta}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln t)^{\beta}}{t^{\alpha}}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

إذن $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta} = 0$

* * * *

12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \left(1 - \frac{\ln (1 + x)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- حدد نهاية f على اليسار في 1

2- أ- بين أنه مهما يكن x من D فإن

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln (1 + h(x))$$

حيث h هي الدالة المعرفة بما يلي

$$h(x) = \frac{\ln (1 + x)}{\ln \frac{1}{x}}$$

ب- استنتج نهاية f على اليمين في 0.

1-أ- تحديد المجموعة

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ 1 - \dfrac{\ln (1 + x)}{\ln x} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{\ln (1 + x)}{\ln x} < 1 \end{cases}$$

إذاكان $x > 1$ فإن $\ln x > 0$ ومنه

$$\frac{\ln (1 + x)}{\ln x} < 1 \Leftrightarrow \ln (1 + x) < \ln x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x < x$$

وهذا غير ممكن ومنه $\quad 0 < x < 1$

إذن $D =]0, 1[$

ب- نهاية f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)$$

لدينا $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \ln(1+x) = \ln 2$ و $\ln 2 > 0$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = -\infty$

إذن $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = +\infty$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \ln f(x) = +\infty$

إذن $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} e^{\ln f(x)}$
$= +\infty$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)$$

ولدينا $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ ومنه

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln \frac{1}{x}}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \ln(1 + h(x))$$

إذن $(\forall x \in D)\ \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + h(x))$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من D

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + h(x))$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1+x)}{\ln \frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\ln 1/x}$$

ولدينا $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty} \frac{\frac{1}{X}}{\ln X}$$
$$= \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X \ln X}$$
$$= 0$$

إذن $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = 0$

ولدينا $\ln f(x) = \frac{h(x)}{x} \cdot \frac{\ln(1 + h(x))}{h(x)}$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1+h(x))}{h(x)} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X}$$
$$= 1$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{h(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}$$
$$= 0$$

لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

وأن
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{\ln X}$$
$$= 0$$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln f(x)) = 0$

إذن
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{\ln f(x)}$$
$$= 1$$

* * * *

13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

1- أ- بين أن الدالة f زوجية

ب- حدد نهاية f عند $+\infty$

2- ادرس رتابة الدالة f

3- ليكن g قصور الدالة f على IR^+

أ- بين أن g تقابل من IR^+ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد g^{-1} التقابل العكسي للتقابل g .

4- ليكن h قصور الدالة f على IR^-

أ- بين أن h تقابل من IR^+ نحو مجال J يجب تحديده

ب- ليكن h^{-1} التقابل العكسي للتقابل h

بين أن $h^{-1}(x) = -g^{-1}(x)$ $\quad \forall x \in [1, +\infty[$

1-أ- زوجية الدالة f

* مجموعة تعريف الدالة f هي IR

* ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)})$$
$$= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$$
$$= f(x)$$

إذن $\forall x \in IR \quad f(-x) = f(x)$

* وهذا يعني أن الدالة f زوجية

ب- نهاية الدالة f عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ولدينا

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

ومنه $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- رتابة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

ومنه

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x > e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow x > -x$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

إذن $f(x) > 0 \quad \forall x \in IR_*^+$

وهذا يعني أن f تزايدية قطعا على IR^+ وبما أنها زوجية فإن f تناقصية قطعا على IR^-

3-أ- التقابل g

لدينا g متصلة على IR^+ لأن f قابلة لاشتقاق على IR^+

لدينا g تزايدية قطعا على IR^+ لأن f تزايدية قطعا على IR^+

ومنه g تقابل من IR^+ نحو المجال I حيث

$$I = [g(0), \lim_{x \to +\infty} g[$$
$$= [f(0), \lim_{x \to +\infty} f[$$
$$= [1, +\infty[$$

إذن g تقابل من IR^+ نحو $[1, +\infty[$

ب- التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من $[1, +\infty[$ و y عنصرا من IR^+ . لدينا

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$$
$$\Leftrightarrow 2x = e^y + \frac{1}{e^y}$$
$$\Leftrightarrow 2x e^y = (e^y)^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2x e^y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (e^y - x)^2 - x^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (e^y - x)^2 = x^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow |e^y - x| = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \text{أو} \\ e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$$

لدينا $y \geq 0$ ومنه $e^y \geq 1$

إذا كان $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ فإن $x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$

أي $\sqrt{x^2 - 1} \leq x - 1$ أي $x^2 - 1 \leq (x-1)^2$

بمعنى أن $2(x-1) \leq 0$

وبما أن $x - 1 > 0$ فإن $x = 1$

إذن $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

وبالتالي فإن $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \forall x \in [1, +\infty[$

4-أ- التقابل h

لدينا f زوجية ومنه

$$\forall x \in IR \quad f(-x) = f(x)$$

إذن $h(x) = g(-x) \quad \forall x \in IR^-$

نعتبر الدالة العددية u المعرفة بمايلي

$$u(x) = -x \quad \forall x \in IR^-$$

لدينا $h = g \circ u$

بما أن u تقابل من IR^- نحو IR^+ و g تقابل من IR^+ نحو $[1, +\infty[$

فإن h تقابل من IR^- نحو $[1, +\infty[$

ب- التقابل العكسي للتقابل h

لدينا $h = g \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة سابقا

ومنه $h^{-1} = u^{-1} \circ g^{-1}$

إذن $h^{-1}(x) = -g^{-1}(x) \quad \forall x \in [1, +\infty[$

* * * *

14

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = |e^x - e^{-x}|$$

1- أ- بين أن الدالة f زوجية

ب- حدد نهاية f عند $+\infty$

2- ضع جدول تغيرات الدالة f

3- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- حدد معادلة نصف مماس (C) على اليمين في O

ج- انشئ المنحنى (C)

1-أ- الدالة f زوجية

* لدينا IR هي مجموعة تعريف الدالة f ، وهي مماثلة بالنسبة للصفر.

* ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$f(-x) = | e^{-x} - e^{-(-x)} | = | e^{x} - e^{-x} | = f(x)$$

* إذن الدالة f زوجية

ب- نهاية f عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- جدول تغيرات الدالة f

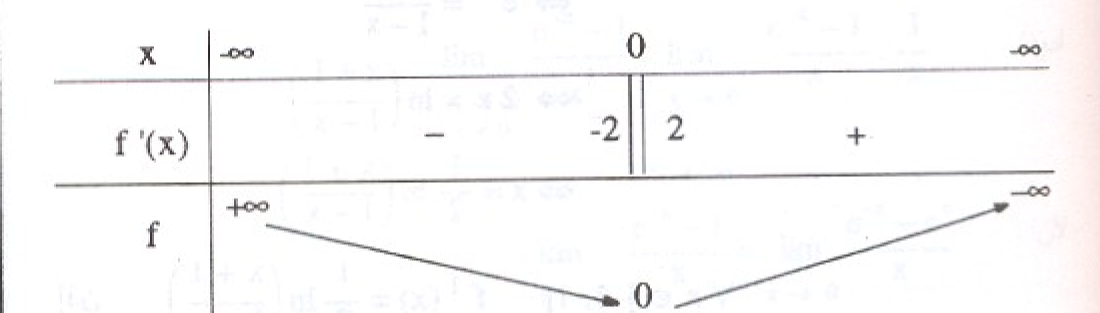
ليكن x عنصرا من IR^{+}.

لدينا $e^{x} > e^{-x}$ ومنه $f(x) = e^{x} - e^{-x}$

إذن $f'(x) = e^{x} - (-1)e^{-x}$

$= e^{x} + e^{-x}$

ومنه $f'(x) > 0 \quad \forall x \in IR^{+}$



x	$-\infty$		0		$-\infty$
f '(x)		−	-2 ‖ 2	+	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$-\infty$

3-أ- الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

* لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x e^{x}} \right)$

$= +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} x e^{x} = +\infty$

* إذن تقبل (C) اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأراتيب

ب- معادلة نصف مماس (C) على اليمين في O

* لدينا $f(0) = 0$

ولدينا $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x}$

$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x}$

حيث g هي الدالة المعرفة بمايلي

$\forall x \in IR \quad g(x) = e^{x} - e^{-x}$

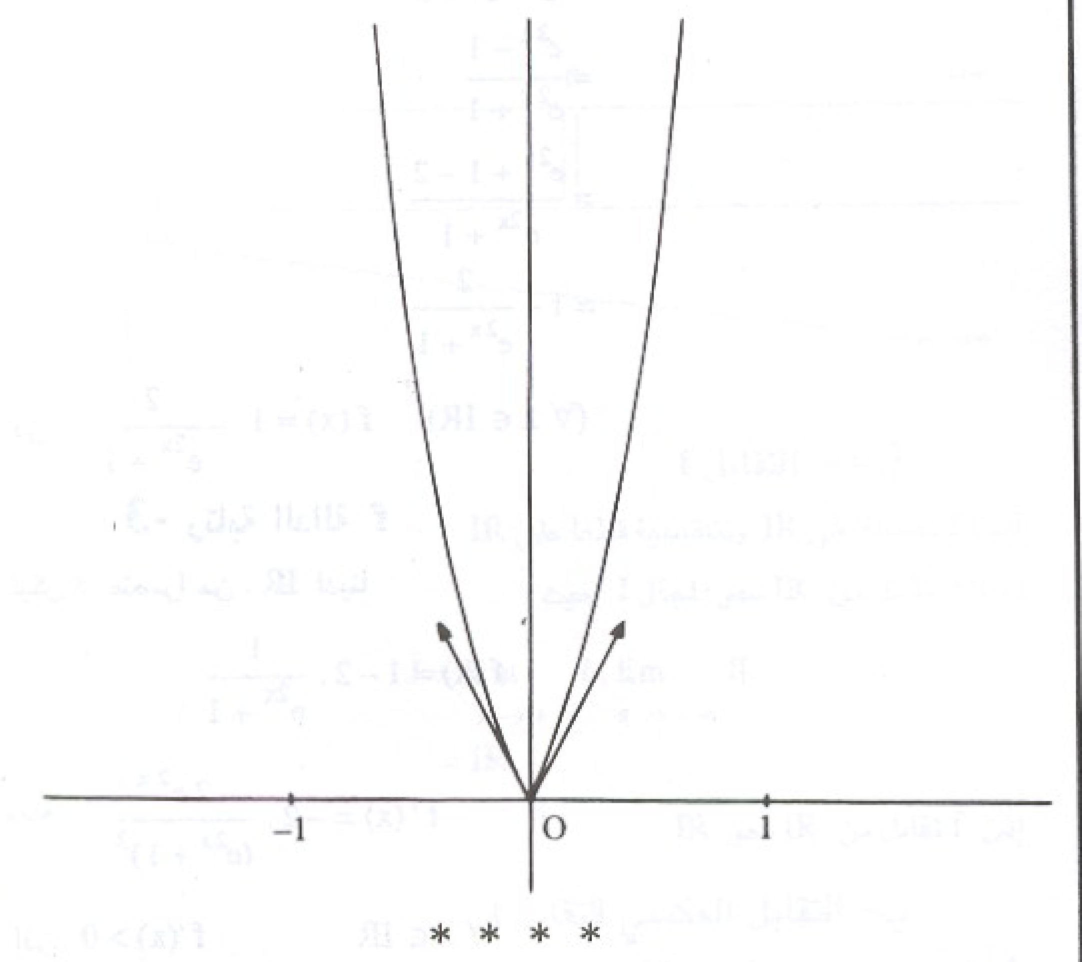
وهي قابلة للاشتقاق في 0

ومنه $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = g'(0)$

$= 2$

إذن معادلة نصف مماس (C) على اليمين في 0 هي $y = 2x$

ج- انشاء المنحنى (C)



* * * *

15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

1- أ- بين أن الدالة f فردية

ب- بين أن $\forall x \in IR \quad f(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$

3- ادرس رتابة الدالة f

4- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

ب- حدد معادلة مماس (C) في النقطة O

ج- انشئ المنحنى (C)

5- أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للدالة f .

1- الدالة f فردية

* لدينا $e^{x} > 0 \quad (\forall x \in IR)$ ومنه $e^{x} + e^{x} \neq 0 \quad (\forall x \in IR)$

إذن IR هي مجموعة تعريف الدالة f

* ليكن x عنصرا من IR لدينا :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}}$$

$$= -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$= -f(x)$$

* إذن الدالة f فردية.

2- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$
$$=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
$$=\frac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1}$$
$$=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$$

إذن $(\forall x\in IR)\quad f(x)=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$

3- رتابة الدالة f

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f(x)=1-2\cdot\frac{1}{e^{2x}+1}$$

ومنه $f'(x)=-2\cdot\frac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

إذن $f'(x)>0 \qquad \forall x\in IR$

وهذا يعني أن f تزايدية قطعا على IR

4-أ- الفرعان اللانهائيان للمنحنى (C)

لدينا $\forall x\in IR \qquad f(x)=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$

* ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}+1=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

إذن تقبل (C) مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$

* ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+1=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

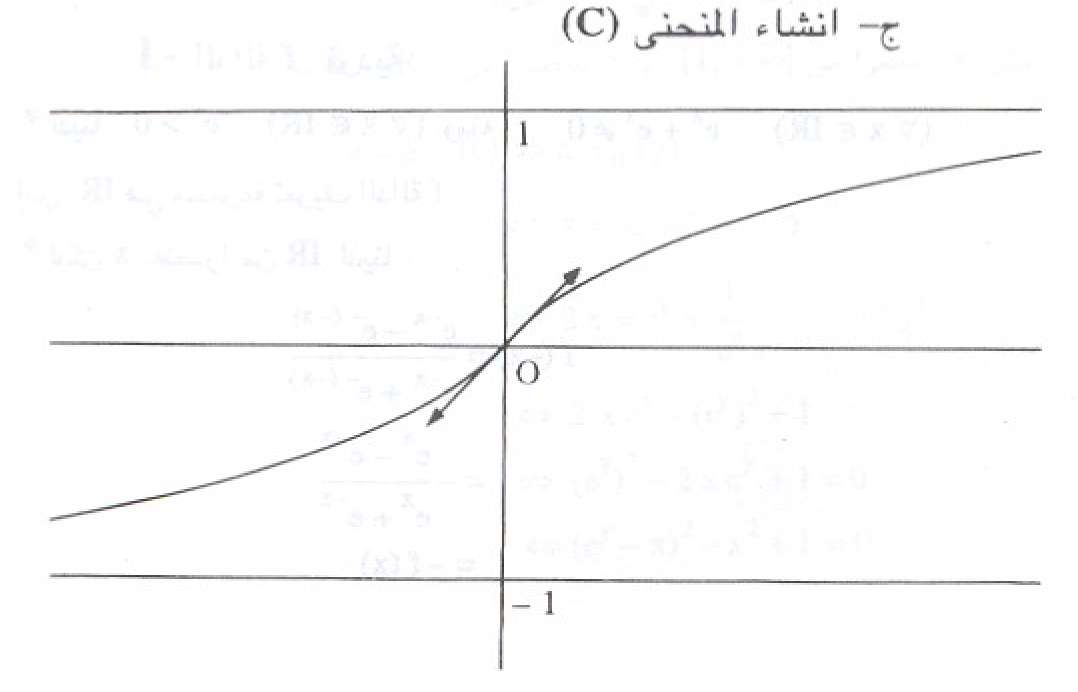
إذن تقبل (C) مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$

ب- معادلة مماس (C) في 0

لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

إذن معادلة مماس (C) في 0 هي $y=x$

ج- انشاء المنحنى (C)



5-أ- التقابل f

لدينا f متصلة على IR وتزايدية قطعا على IR

ومنه f تقابل من IR نحو المجال I حيث

$$I=\left]\lim_{x\to-\infty} f,\ \lim_{x\to+\infty} f\right[$$
$$=]-1,1[$$

إذن f تقابل من IR نحو $]-1,1[$

ب- التقابل العكسي للتقابل f

ليكن x عنصرا من $]-1,1[$ و y عنصرا من IR . لدينا

$$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$$
$$\Leftrightarrow x=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{e^{2x}+1}=1-x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}+1=\frac{2}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{x+1}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

إذن $\forall x\in]-1,1[\qquad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

* * * *

16

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) & ; \quad x\geq 0\\ \sqrt{e^{-x}-1} & ; \quad x\leq 0\end{cases}$$

1- أ- ادرس اتصال الدالة f في 0

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0

2- ادرس تغيرات الدالة f

3- أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال يجب تحديده

ب- بين أن f هو التقابل العكسي للتقابل f

1-أ- اتصال الدالة f في 0

* لدينا
$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$
$$=\ln 1$$
$$=0$$
$$=f(0)$$

* لدينا
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\sqrt{e^{-x}-1}$$
$$=0$$
$$=f(0)$$

* إذن f متصلة في 0

ب- قابلية اشتقاق الدالة f في 0

* ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا

$$f(x) = -\ln(x^2+1)$$

ومنه

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{-\ln(x^2+1)}{x} = -\frac{\ln(x^2+1)-\ln(0^2+1)}{x}$$

إذن

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{2.0}{0^2+1} = 0$$

* ليكن x عنصرا من $]-\infty, 0]$

لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt{e^{-x}-1}}{x} = -\sqrt{\frac{e^{-x}-1}{x^2}}$$

لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{-x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x}\cdot\frac{1}{x} = +\infty$$

لأن

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{0}}{x} = -e^{-0} = -1$$

ولأن

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

* إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وغير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 .

2- تغيرات الدالة f

*لدينا

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \ln X = -\infty$$

لدينا

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{e^{-x}-1} = +\infty$$

لأن

$$\lim_{x\to -\infty} (e^{-x}-1) = +\infty$$

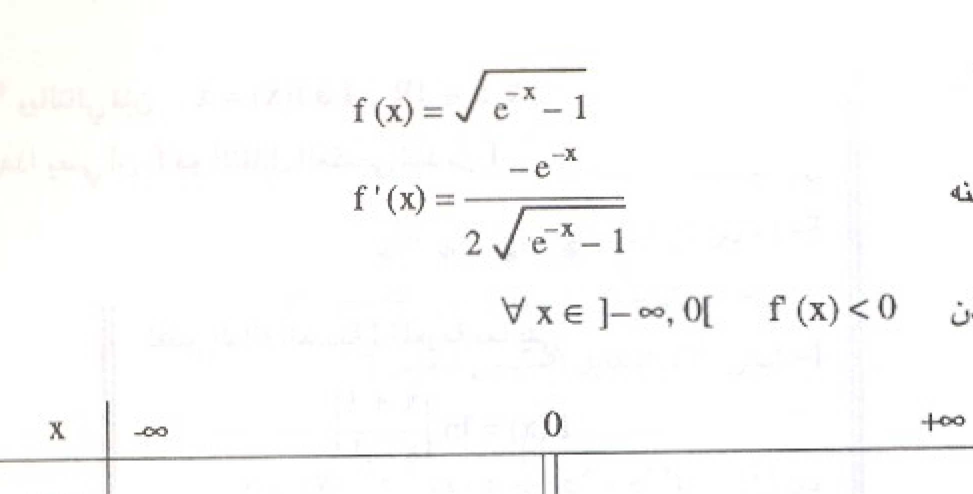
* ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$ لدينا $f(x) = -\ln(x^2+1)$

ومنه

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) < 0$

ليكن x عنصرا من $]-\infty, 0[$ لدينا



$$f(x) = \sqrt{e^{-x}-1}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-1}}$$

إذن $\forall x \in]-\infty, 0[\quad f'(x) < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		-
f	$+\infty$	↘	$-\infty$

3-أ- التقابل f

لدينا f متصلة على IR وتناقصية قطعا على IR

ومنه f تقابل من IR نحو المجال J حيث

$$J =]\lim_{x\to +\infty} f, \lim_{x\to -\infty} f[= IR$$

إذن f تقابل من IR نحو IR

ب- التقابل العكسي للتقابل f

* ليكن x عنصرا من $[0, +\infty[$

لدينا f تناقصية قطعا على IR^+ ومنه $f(x) \leq f(0)$

أي $f(x) \leq 0$

إذن

$$f\circ f(x) = f(f(x)) = \sqrt{e^{-f(x)}-1}$$

ولدينا $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ أي $-f(x) = \ln(x^2+1)$

ومنه

$$e^{-f(x)} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1$$

إذن

$$f\circ f(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = x$$

* ليكن x عنصرا من $]-\infty, 0]$

لدينا $f(0) \leq f(x)$ لأن f تناقصية قطعا على $]-\infty, 0]$

ومنه

$$f\circ f(x) = \ln\left(\frac{1}{f^2(x)+1}\right)$$

ولدينا $f(x) = \sqrt{e^{-x}-1}$ ومنه $f^2(x)+1 = e^{-x}$

إذن

$$f\circ f(x) = \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) = \ln(e^x) = x$$

* وبالتالي فإن $\forall x \in IR \quad f o f(x) = x$

وهذا يعني أن f هو التقابل العكسي للتقابل f

* * * *

17

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن الدالة f فردية.

ج- حدد نهايتي f عند $+\infty$ وعند 1

2- بين أن $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \forall x \in D - \{0\}$

3- أ- ادرس رتابة الدالة f على $]1, +\infty[$

ب- استنتج رتابتها على $]0, 1[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

4- ليكن g قصور الدالة f على $]1, +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $]1, +\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للدالة g .

1- أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \left|\frac{x+1}{x-1}\right| > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \notin \{-1, 1\}$$

إذن

$$D = IR - \{-1, 1\}$$
$$=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

ب- الدالة f فردية

* لدينا D متماثل بالنسبة للصفر

* ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$f(-x) = \ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$
$$= -\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$
$$= -f(x)$$

* إذن الدالة f فردية

ج- نهاية f عند $+\infty$

لدينا $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \forall x \in]1, +\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1$$
$$= 0$$

نهاية f عند 1

لدينا $\lim\limits_{x \to 1} \left|\frac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

2- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $D - \{0\}$. لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left|\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$
$$= f(x)$$

إذن $\forall x \in D - \{0\} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

3- أ- رتابة الدالة f على $]1, +\infty[$

لدينا $f(x) = \ln u(x) \quad \forall x \in]1, +\infty[$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بمايلي

$$u(x) = \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

أي $(\forall x \in]1, +\infty[)\ u(x) = \frac{x+1}{x-1}$

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$ لدينا

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ولدينا

$$u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1}$$
$$= \frac{-2}{x^2-1}$$

وبما أن $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$

إذن f تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$

ب- الاستنتاج

ليكن x و y عنصرين من $]0, 1[$ بحيث $x < y$

لدينا $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 1$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right) < f\left(\frac{1}{y}\right)$

لأن f تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$

وحسب السؤال الثاني لدينا $f(x) < f(y)$

إذن f تزايدية قطعا على]0, 1[

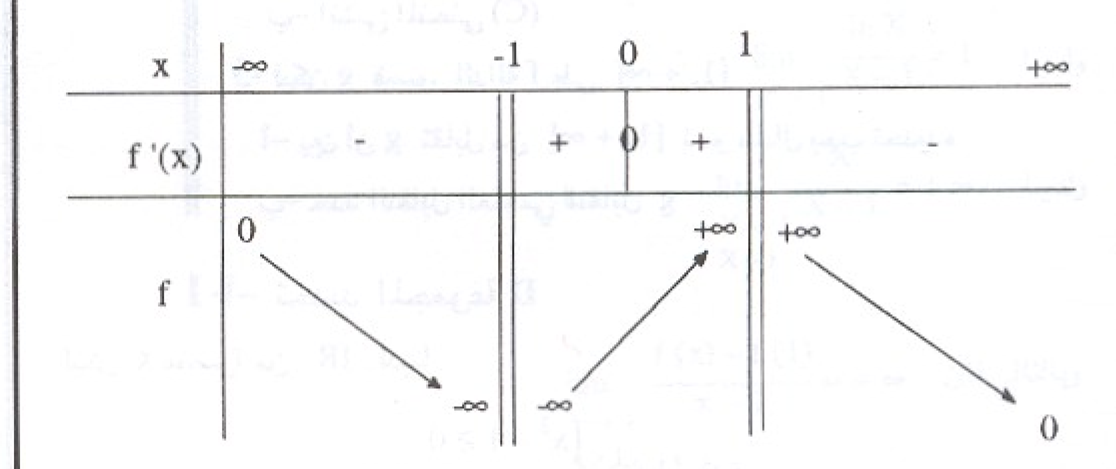
ج- جدول تغيرات الدالة

* ليكن x عنصرا من]-1, 1[لدينا

$$f(x) = \ln\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$= \ln(x+1) - \ln(1-x)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق في 0 ومنه

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{1-0} = 0$$



4-أ- التقابل g

لدينا g متصلة على]1, + ∞[وتناقصية قطعا على]1, + ∞[

ومنه g تقابل من]1, + ∞[نحو المجال J حيث

$$J = \left]\lim_{x \to +\infty} f, \lim_{x \to 1} f\right[$$
$$=]0, +\infty[$$

إذن g تقابل من]1, + ∞[نحو IR_+^*

ب- التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من IR_+^* و y عنصرا من]1, + ∞[لدينا

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{y-1}$$
$$\Leftrightarrow e^x y - e^x = y + 1$$
$$\Leftrightarrow y(e^x - 1) = 1 + e^x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1+e^x}{e^x - 1}$$

إذن $\forall x \in IR_+^* \quad g^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

* * * *

18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- حدد نهاية f عند ∞ +

2- بين أنه مهما يكن x من IR فإن

$$f(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

ب- استنتج نهاية f عند ∞ -

3- أ- بين أن f تزايدية قطعا على IR

ب- استنتج أن f تقابل من IR نحو IR

4- ليكن f^{-1} التقابل العكسي للتقابل f

بين أن $\forall x \in IR \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

1- تحديد المجموعة D

لدينا $(\forall x \in IR) \ |x| < \sqrt{x^2+1}$

ولدينا $\forall x \in IR \quad -x < |x|$

إذن $(\forall x \in IR) \sqrt{x^2+1} + x > 0$

ومنه $D = IR$

ب- نهاية الدالة f عند ∞ +

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

ومنه $\lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

ومنه

$$\ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$$
$$= -\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$$
$$= -f(x)$$

إذن $(\forall x \in IR) \ f(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

ب- الاستنتاج

لدينا $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$

ومنه $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

إذن $\lim_{x \to -\infty} -\ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -\infty$

أي $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3-أ- رتابة الدالة f

نعتبر الدالة العددية u المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

لدينا $\forall x \in IR \quad f(x) = \ln u(x)$

وبما أن u قابلة للاشتقاق على IR وأنها موجبة قطعا على IR فإن f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR.

لدينا

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ولدينا

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

إذن $\forall x \in IR \quad f'(x) > 0$

وهذا يعني أن f تزايدية قطعا على IR

ب- الاستنتاج

لدينا f متصلة على IR لأنها قابلة للاشتقاق على IR

لدينا f تزايدية قطعا على IR

إذن f تقابل من IR نحو المجال J حيث

$$J =]\lim_{x \to -\infty} f, \lim_{x \to +\infty} f[=]-\infty, +\infty[$$

ومنه f تقابل من IR نحو IR

4- التقابل العكسي للتقابل f

ليكن x عنصرا من IR و y عنصرا من IR. لدينا

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \\ x = -\ln(\sqrt{y^2+1} - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + \sqrt{x^2+1} = e^x \\ -y + \sqrt{y^2+} = e^{-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

إذن $(\forall x \in IR) \quad f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

* * * *

19

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \ln(|x| + \sqrt{x^2 - 1})$$

1- أ حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- بين أن f زوجية

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- انشئ المنحنى (C)

5- ليكن g قصور الدالة f على $]1, +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $]1, +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

ب- حدد التقابل العكسي للتقابل g

1-أ- تحديد المجموعة D

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ |x| + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x| + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq 1$$

إذن $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

ب- الدالة f زوجية

* لدينا D متماثل بالنسبة للصفر

* ليكن x عنصرا من D. لدينا

$$f(-x) = \ln(|-x| + \sqrt{(-x^2) - 1})$$
$$= \ln(|x| + \sqrt{x^2 - 1})$$
$$= f(x)$$

* إذن الدالة f زوجية

2- قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x - 1}$$

نضع $X = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ومنه

$$X = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

أي $\frac{1}{X} = x - \sqrt{x^2 - 1}$

ومنه $2x = X + \frac{1}{X}$ أي $x = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2 + 1}{X}\right)$

إذن
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\ln X}{\frac{1}{2}\left(\frac{X^2+1}{X}\right)-1} = \frac{2X\ln X}{X^2-2X+1} = \frac{2X\ln X}{(X-1)^2}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{X\to 1\\ X>1}} \frac{2X}{X-1}\cdot\frac{\ln X}{X-1}$$

ولدينا $\lim_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$

ولدينا $\lim_{\substack{X\to 1\\ X>1}} \frac{X}{X-1} = +\infty$

وبالتالي فإن $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

وهذا يعني أن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

3- تغيرات الدالة f

بما أن f زوجية فإنه يكفي دراسة تغيراتها على $[1, +\infty[$

* لدينا $\lim_{x\to+\infty} |x|+\sqrt{x^2-1} = +\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$ لدينا $f(x) = \ln u(x)$

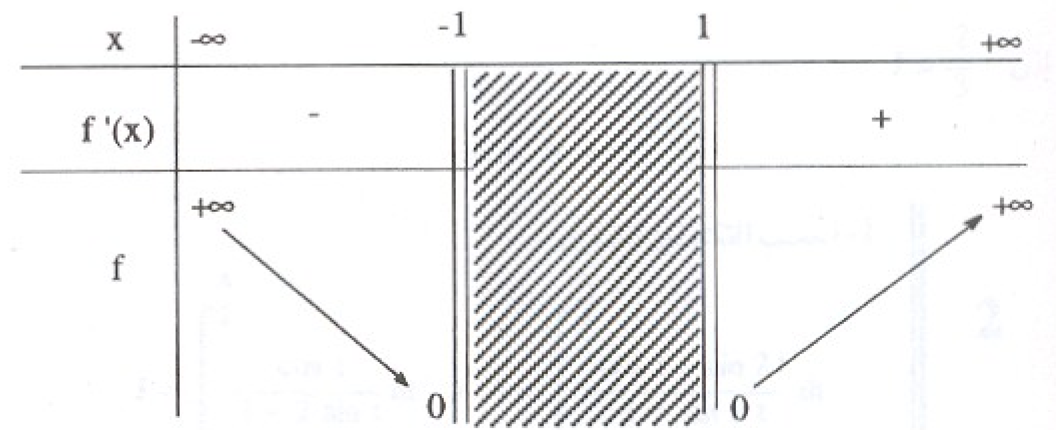
حيث u هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad u(x) = x + \sqrt{x^2-1}$$

ومنه $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

ولدينا
$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{u(x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

ومنه $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	‖	//////	‖	+	
f	$+\infty$	↘	0 ‖	//////	‖ 0	↗	$+\infty$

4-أ- الفرع اللانهائي للمنحنى (C)

* لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

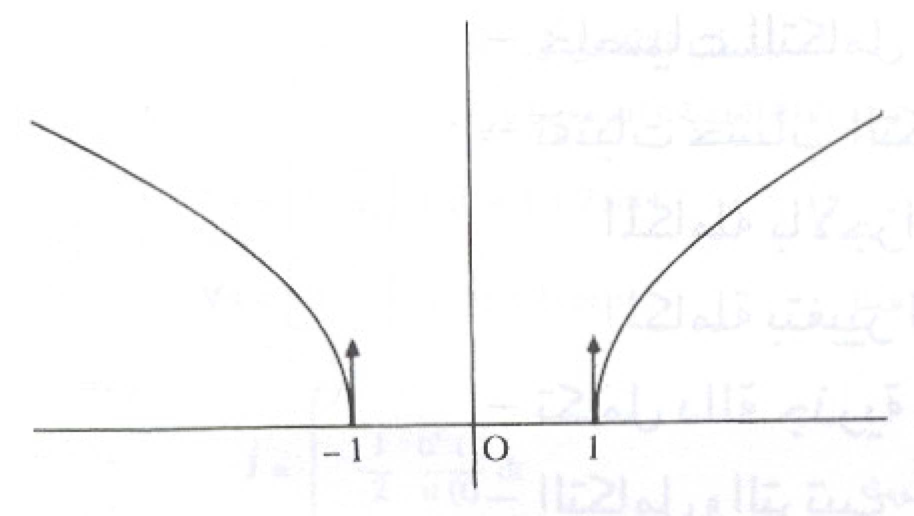
لدينا
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ومنه تقبل (C) اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأفاصيل

ب- انشاء المنحنى (C)



5-أ- التقابل g

لدينا g متصلة على $[1, +\infty[$ وتزايدية قطعا على $[1, +\infty[$

ومنه g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو المجال I حيث

$$I = [g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)[\; = [0, +\infty[$$

إذن g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو IR^+

ب- تحديد التقابل العكسي للتقابل g

ليكن x عنصرا من IR^+ و y عنصرا من $[1, +\infty[$. لدينا

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(y+\sqrt{x^2-1})$$
$$\Leftrightarrow e^x = y+\sqrt{y^2-1}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y+\sqrt{y^2-1} \\ e^{-x} = y-\sqrt{y^2-1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x}$$

ومنه
$$(\forall x \in IR^+)\; g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

7 حساب التكامل

- تكامل دالة متصلة
- خاصيات التكامل : علاقة شال – الخطانية
- تقنيات حساب التكامل
  المكاملة بالأجزاء
  المكاملة بتغيير المتغير
- تكامل دالة جذرية
- التكامل والترتيب – تأطير تكامل
- القيمة المتوسطة لدالة متصلة
- حساب المساحات والحجوم
- دراسة دوال ومتتاليات معرفة بتكامل

1

1- احسب التكامل التالي

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x . \cos^2 x \, dx$$

2- استنتج التكامل التالي

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$$

1- حساب التكامل المقترح

لدينا

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos'(x) \cos^2 x \, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos'(x) \cos^2 x \, dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\cos^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos 0\right)$$

إذن $I = \frac{1}{3}$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. لدينا

$$\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$$
$$= \sin x - \sin x \cos^2 x$$

ومنه

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - I$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) - I$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

إذن $J = \frac{2}{3}$

* * * *

2

1- احسب التكاملين التاليين

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin 2t}{1 + \sin 2t} dt \quad \text{و} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + 2 \sin t} dt$$

2- استنتج قيمة التكامل التالي

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1 + 2 \sin t} dt$$

1- حساب التكامل I .

ليكن t عنصرا من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. لدينا

$$\cos t + \sin 2t = \cos t + 2\cos t \sin t$$
$$= \cos t \,(1 + 2 \sin t)$$

ومنه

$$\frac{\cos t + \sin 2t}{1 + 2\sin t} = \cos t$$

إذن

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, . \, dt$$

$$= [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1$$

حساب التكامل J.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة بما يلي

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad u(t) = 1 + 2 \sin t$$

لدينا

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad u'(t) = 2 \cos t$$

ومنه

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{u'(t)}{u(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(u(t))]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln u\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln u(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

2- الاستنتاج

لدينا

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin 2t - \cos t}{1 + 2\sin t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos t + \sin 2t}{1 + 2\sin t} - \frac{\cos t}{1 + 2\sin t}\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin 2t}{1 + 2\sin t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + 2\sin t} dt$$

$$= I - J$$

إذن $K = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$

* * * *

3

1- تحقق أنه مهما يكن x من $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ فإن

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

2- استنتج التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$

1- التحقق من النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. لدينا

$$\frac{1}{2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{2} \cos x \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cos x \frac{2}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

إذن $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

2- الاستنتاج

حسب السؤال الأول يكون لدينا

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x}{1 - \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} [\ln (1 + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} [\ln (1 - \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

إذن $I = \frac{1}{2} \ln \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2}$ أي $I = \frac{1}{2} \ln (3 + \sqrt{2})$

* * * *

4

1- تحقق أنه مهما يكن x من IR فإن

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} [3 - (2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)]$$

2- استنتج التكامل $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2 \sin x - 1} dx$

1- التحقق من النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR .

لدينا
$$3 - (2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) = 3 - (4 \sin^2 x - 1)$$

$$= 4 - 4 \sin^2 x$$

$$= 4 \cos^2 x$$

إذن $\cos^2 x = \frac{1}{4} (3 - (2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1))$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. لدينا

$$\frac{\cos^3 x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} \cdot \frac{1}{4} (3 - (2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1))$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} - \frac{1}{4} \cos x (2 \sin x + 1)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2 \cos x}{2 \sin x - 1} - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos x$$

ومنه
$$I = \frac{3}{8} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{2 \sin x - 1} dx - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= \frac{3}{8} [\ln (2 \sin x - 1)]_{\pi/3}^{\pi/2} - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} [\sin x]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{8} (-\ln (\sqrt{3} - 1)) + \frac{1}{8} \left(-1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{8} \ln (\sqrt{3} - 1) - \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

إذن $I = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \ln (\sqrt{3} - 1)$

* * * *

5

1- احسب التكامل التالي

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

2- استنتج التكامل التالي

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

1- حساب التكامل I.

إذا اعتبرنا الدالة العددية u المعرفة يما يلي :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad u(x) = \cos x + \sin x$$

نجد أن $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx$

$$= [\ln u(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln u\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln u(0)$$

$$= \ln \sqrt{2}$$

إذن $I = \frac{1}{2} \ln 2$

2- الاستنتاج

لدينا $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\cos x - \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

نضع $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ ويكون لدينا $I = K - J$

ولدينا $K + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} d x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} d x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$$

$$= [x]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

إذن $K + J = \frac{\pi}{4}$ و $K - J = I$

ومنه $2J = \frac{\pi}{4} - I$

وبالتالي فإن $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$

* * * *

6

1- بين أنه مهما يكن t من IR فإن

$$(1 - t)^3 + (1 + t)^3 = 2 + 6t^2$$

1- استنتج قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\pi} (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن t عنصرا من IR. لدينا

$$(1 + t)^3 = t^3 + 3 t^2 + 3 t + 1$$

$$(1 - t)^3 = (-t)^3 + 3 (-t)^2 + 3 (-t) + 1$$

$$= -t^3 + 3t^2 - 3 t + 1$$

ومنه $(1 + t)^3 + (1 - t)^3 = 6t^2 + 2$

إذن $\forall t \in IR \quad (1 + t)^3 + (1 - t)^3 = 6t^2 + 2$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR. لدينا

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ و } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

ومنه $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{(1 + \cos 2x)^3 + (1 - \cos 2x)^3}{8}$

وحسب السؤال الأول يكون لدينا $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{8}(2 + 6 \cos^2 2x)$

ولدينا $\cos 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ ومنه

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{8}\left(2 + 6 . \frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4x)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

إذن $I = \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x\right) dx$

$$= \left[\frac{5}{8} x + \frac{3}{32} \sin 4x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{5\pi}{8}$$

* * * *

7

بين أنه مهما يكن x من IR^* . فإن

$$\frac{1}{x^2 (1 + x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$

1- استنتج التكامل التالي

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2 (1 + x^2)} dx$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR^* لدينا

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}$$

إذن مهما يكن x من IR^* فإن

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

2- الاستنتاج

حسب السؤال الأول يكون لدينا

$$I=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx-\int_1^2\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2-[\text{Arctan }x]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(\text{Arctan }2-\text{Arctan }1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\text{Arctan }2$$

إذن $I=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\text{Arctan }2$

* * * *

8

لتكن f الدالة المعرفة على $D=IR-\{-1,0\}$ بمايلي :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

1- حدد عددين حقيقيين a و b بحيث

$$(\forall x\in D)\ f(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{(x+1)^2}$$

2- استنتج التكامل التالي

$$I=\int_1^2 f(x)\,dx$$

3- لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1

أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$

1- تحديد العددين a وb

ليكن x عنصرا من D . لدينا

$$\frac{a}{x^2}-\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2-b\,x^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{(a-b)\,x^2+2\,a\,x+a}{x^2(x+1)^2}$$

إذن $f(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{(x+1)^2}$ لكل x من D يعني أن

$$\forall x\in D\qquad (a-b)\,x^2+2ax+a=2x+1$$

أي

$$\forall x\in D\qquad (a-b)\,x^2+2(a-1)x+(a-1)=0$$

بمعنى أن المعادلة $(a-b)X^2+2(a-1)X+(a-1)=0$ تقبل مالا نهاية له من الحلول ، وهذا يعني أن

$a-b=0$ و $a-1=0$ أي $a=b=1$

إذن $(\forall x\in D)\ f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$

2- الاستنتاج

حسب السؤال السابق لدينا $(\forall x\in D)\ f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$

ومنه

$$I=\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx-\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2-\left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

ب- حساب النهاية المطلوبة

لدينا F هي الدالة الاصلية للدالة f على $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1

ومنه

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\quad F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$. لدينا

$$F(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$=\int_1^2\frac{1}{t^2}dt-\int_1^x\frac{1}{(t+1)^2}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x-\left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^x$$

$$=\left(-\frac{1}{x}+1\right)-\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}$$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}$

وبما أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -\frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x+1} = 1$

فإن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) = -\infty$

* * * *

9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 + x|\, dt$$

1- احسب $f(x)$ من أجل $x \in]-\infty,-1] \cup IR^+$

2- ليكن x عنصرا من $[-1,0]$

بين أن $f(x) = \frac{x(3-4\sqrt{-x})}{3} + \frac{1}{3}$

3- بين أن $\forall x \in IR \quad f(x) \geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$

1- حساب صورة العدد x

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا $\forall t \in [0,1] \quad t^2 + x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 (t^2 + x)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + xt\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + x$$

إذن $(\forall x \in IR^+)\ f(x) = x + \frac{1}{3}$

ليكن x عنصرا من $]-\infty,-1]$

لدينا $\forall t \in [0,1] \quad t^2 \leq 1$

وبما أن $x \leq -1$ فإن $-x \geq 1$ ومنه

$\forall t \in [0,1] \quad t^2 \leq -x$

أي $\forall t \in [0,1] \quad t^2 + x \leq 0$

إذن $f(x) = \int_0^1 -(t^2 + x)\, dt$

$$= -\int_0^1 (t^2 + x)\, dt$$

$$= -x - \frac{1}{3}$$

وبالتالي فإن $(\forall x \in]-\infty, -1])\ f(x) = -x - \frac{1}{3}$

2- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $0 \leq -x \leq 1$ ومنه $0 \leq \sqrt{-x} \leq 1$

إذن $f(x) = \int_0^{\sqrt{-x}} |t^2 + x|\, dt + \int_{\sqrt{-x}}^1 |t^2 + x|\, dt$

ولدينا $\forall t \in [0, \sqrt{-x}] \quad t^2 + x \leq 0$

$\forall t \in [\sqrt{-x}, 1] \quad t^2 + x \geq 0$

ومنه $f(x) = -\int_0^{\sqrt{-x}} (t^2 + x)\, dt + \int_{\sqrt{-x}}^1 (t^2 + x)\, dt$

$$= -\left[\frac{t^3}{3} + xt\right]_0^{\sqrt{-x}} + \left[\frac{t^3}{3} + xt\right]_{\sqrt{-x}}^1$$

$$= -\left(\frac{(\sqrt{-x})^3}{3} + x\sqrt{-x}\right) + \left(\frac{1}{3} + x - \frac{(\sqrt{-x})^3}{3} - x\sqrt{-x}\right)$$

$$= -\frac{2x\sqrt{-x}}{3} + \frac{1}{3} + x - \frac{2x\sqrt{-x}}{3}$$

$$= x - \frac{4x\sqrt{-x}}{3} + \frac{1}{3}$$

إذن $f(x) = x.\frac{(3-4\sqrt{-x})}{3} + \frac{1}{3}$

3- اثبات النتيجة المقترحة

حسب الاسئلة السابقة لدينا

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{3} & ; \ x \leq -1 \\ \frac{x(3-4\sqrt{-x})}{3} + \frac{1}{3} & ; \ -1 \leq x \leq 0 \\ x + \frac{1}{3} & ; \ x \geq 0 \end{cases}$$

الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]-\infty, -1[$ وتزايدية على المجال $[0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]-1, 0[$

لدينا $f(x) = x - \frac{4x\sqrt{-x}}{3} + \frac{1}{3}$

$$= x + \frac{4}{3}(\sqrt{-x})^3 + \frac{1}{3}$$

ومنه $f'(x) = 1 + 4(\sqrt{-x})^2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$

$$= 1 - 2\sqrt{-x}$$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f	$+\infty$	↘		↘	$f\left(-\frac{1}{4}\right)$	↗		↗	$+\infty$

إذن $(\forall x \in IR)\ f(x) \geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$

* * * *

10

ليكن n عنصرا من IN.

1- ليكن x عنصرا من IR . بين أن

$$\sin^{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k}(x)$$

2- ليكن k عنصرا من IN.

احسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k}(t)$ (حيث $x \in IR$)

3- استنتج التكامل التالي $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}(t)\,dt$ (حيث $x \in IR$)

1- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin x (\sin^2 x)^n$$
$$= \sin x (1-\cos^2 x)^n$$
$$= \sin x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\cos^2 x)^k$$
$$= \sin x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \cos^{2k}(x)$$

إذن

$$\sin^{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k}(x)$$

2- حساب التكامل المقترح

لدينا

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k}(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos'(t)\cos^{2k}(t)\,dt$$
$$= -\left[\frac{\cos^{2k+1}(t)}{2k+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$
$$= \frac{-1}{2k+1}\left[\cos^{2k+1}(x) - \cos^{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{-\cos^{2k+1}(x)}{2k+1}$$

إذن

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k}(t)\,dt = \frac{-\cos^{2k+1}(x)}{2k+1}$$

3- الاستنتاج

حسب السؤال الأول لدينا مهما تكن t من IR فإن

$$\sin^{2n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin t \cos 2k(t)$$

ومنه

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k}(t)\,dt$$

وحسب السؤال الثاني يكون لدينا

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k . \frac{-\cos^{2k+1}(x)}{2k+1}$$
$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-1)^k}{2k+1} \cos^{2k+1}(x)$$

* * * *

11

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على IR بحيث

$$\begin{cases} \forall x \in IR & (f(x))^2 = f'(x) \\ \forall x \in IR & f(x) > 0 \end{cases}$$

1- حدد دالة أصلية للدالة f التي تنعدم في 0.

2- استنتج دالة أصلية للدالة $\frac{1}{f}$ التي تنعدم في 0 مستعملا المكاملة بالاجزاء.

1- الدالة الأصلية للدالة f

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0.

لدينا $\forall x \in IR \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

ولدينا $\forall t \in IR \qquad (f(t))^2 = f'(t)$

ومنه $\forall t \in IR \qquad f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$

ليكن x عنصرا من IR . لدينا إذن :

$$F(x) = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$$
$$= [\ln f(t)]_0^x$$
$$= \ln f(x) - \ln f(0)$$

إذن الدالة الاصلية F التي تنعدم في 0 معرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \qquad F(x) = \ln f(x) - \ln f(0)$$

2- الاستنتاج

لتكن G الدالة الاصلية للدالة $\frac{1}{f}$ التي تنعدم في 0.

لدينا $\forall x \in IR \qquad G(x) = \int_0^x \frac{1}{f(t)}\,dt$

نعتبر الدالة العددية u المعرفة بما يلي $\forall t \in IR \quad u(t) = t$

ليكن x عنصرا من IR. لدينا إذن

$$G(x) = \int_0^x u'(t)\left(\frac{1}{f}\right)(t)\,dt$$
$$= \left[u(t)\frac{1}{f(t)}\right]_0^x - \int_0^x u(t)\left(\frac{1}{f}\right)'(t)\,dt$$
$$= \frac{x}{f(x)} - \int_0^x t . \frac{-f'(t)}{(f(t))^2}\,dt$$

ولدينا $(f(t))^2 = f'(t) \quad \forall t \in IR$

ومنه $\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2} = 1 \quad \forall t \in IR$

إذن
$$G(x) = \frac{x}{f(x)} + \int_0^x t\,dt$$
$$= \frac{x}{f(x)} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$= \frac{x}{f(x)} + \frac{x^2}{2}$$

وبالتالي فإن الدالة الاصلية G للدالة $\frac{1}{f}$ التي تنعدم في 0 هي معرفة كالتالي :

$$\forall x \in IR \qquad G(x) = \frac{x}{f(x)} + \frac{x^2}{2}$$

* * * *

12

لتكن f دالة عددية متصلة وقابلة للاشتقاق مرتين على [a,b]

بين أن $\displaystyle\int_a^b x f''(x)\,dx = [b f'(b) - f(b)] - [a f'(a) - f(a)]$

اثبات المتساوية المقترحة

نعتبر الدالة العددية t المعرفة بما يلي : $u(x) = x \quad \forall x \in [a,b]$

لدينا
$$\int_a^b x f''(x)\,dx = \int_a^b u(x)(f')'(x)\,dx$$
$$= [u(x) f'(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) f'(x)\,dx$$
$$= b f'(b) - a f'(a) - \int_a^b f'(x)\,dx$$
$$= b f'(b) - a f'(a) - [f(x)]_a^b$$
$$= b f'(b) - a f'(a) - (f(b) - f(a))$$

إذن
$$\int_a^b x f''(x)\,dx = (b f'(b) - f(b) - (a f'(a) - f(a))$$

* * * *

13

1-أ- بين أنه مهما يكن x عنصرا من IR فإن

$$\cos^5 x = \cos x \,.\, \sin^4 x - 2\cos x \,.\, \sin^2 x + \cos x$$

ب- استنتج التكامل التالي :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$$

2- باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب التكامل التالي

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^4 x \,.\, \sin x\,dx$$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR .

لدينا
$$\cos^5 x = \cos x \,.\, (\cos^2 x)^2$$
$$= \cos x \,.\, (1 - \sin^2 x)^2$$
$$= \cos x\,(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$$

إذن $\cos^5 x = \cos x \sin^4 x - 2\cos x \,.\, \sin^2 x + \cos x$

ب- الاستنتاج

حسب السؤال الاول يكون لدينا

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2\cos x \,.\, \sin^2 x + \cos x \,.\, \sin^4 x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \sin^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \sin^4 x\,dx$$

لدينا
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin'(x) \sin^2 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin'(x) \sin^4 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{5}$$

ولدينا
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1$$

إذن
$$I = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{8}{15}$$

2- حساب التكامل J.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة بما يلي $u(x) = x$ $\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ولتكن v دالة عددية بحيث $v'(x) = \cos^4 x \,.\, \sin x$ $\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا $v'(x) = -\cos'(x) \cos^4 x$ $\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $v(x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x$ $\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

إذن

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)\, v'(x)\, dx$$

$$= [u(x)\, v'(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$= [x \sin x \cos^4 x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{5} \cos^5 x\, dx$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$$

$$= \frac{1}{5} I$$

إذن $J = \frac{8}{75}$

* * * *

14

1- باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب التكامل التالي

$$I = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1})\, dx$$

2- استنتج التكامل التالي :

$$J = \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2+1} - x)\, dx$$

1- حساب التكامل I

نعتبر الدالتين العدديتين u و v بحيث

$\forall x \in [0,1] \quad u(x) = x$

$\forall x \in [0,1] \quad v(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

لدينا

$$I = \int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$= [u(x)\, v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)\, v'(x)\, dx$$

لدينا

$$v'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) . \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ومنه

$$I = [x \ln(x + \sqrt{x^2+1})]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - [\sqrt{x^2+1}\,]_0^1$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)$$

إذن $I = \ln(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)$

2- الاستنتاج

نلاحظ أن $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$ $\quad \forall x \in [0,1]$

ومنه

$$J = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 -\ln(x + \sqrt{x^2+1})\, dx$$

$$= -\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1})\, dx$$

$$= -I$$

إذن $J = (\sqrt{2} - 1) - \ln(1+\sqrt{2})$

* * * *

15

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$. لكل عنصر k من $\{1, ..., n-1\}$ نضع

$$I_k = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

ونضع $I_0 = \int_0^1 (1-x)^n\, dx$ و $I_n = \int_0^1 x^n\, dx$

1- باستعمال المكاملة بالاجزاء بين أن

$I_{k+1} = I_k \quad \forall k \in \{0, ..., n-1\}$

2- احسب I_0

3- استنتج التكامل التالي $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن k عنصرا من $\{0, ..., n-1\}$

لدينا

$$I_{k+1} = \int_0^1 C_n^{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}\, dx$$

$$= C_n^{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}\, dx$$

$$= C_n^{k+1}\left(\left[x^{k+1} \cdot \frac{-(1-x)^{n-k}}{n-k}\right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)\, x^k\, \frac{-(1-x)^{n-k}}{n-k}\, dx\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{k+1}{n-k} C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

لدينا

$$(k+1)\, C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}(k+1)$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(n-k)$$

ومنه $\frac{k+1}{n-k} C_n^{k+1} = C_n^k$

إذن $I_{k+1} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\, dx$

$$= I_k$$

وبالتالي فإن $I_{k+1} = I_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

2- حساب التكامل I_0

لدينا $I_0 = \int_0^1 (1-x)^n\, dx$

$$= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

إذن $I_0 = \frac{1}{n+1}$

2- الاستنتاج

لدينا $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{C_n^k} \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\, dx$

$$= \frac{I_k}{C_n^k}$$

حسب السؤال الاول لدينا $I_{k+1} = I_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

ومنه $I_k = I_0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

إذن $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{I_0}{C_n^k}$

$$= \frac{1}{(n+1)\, C_n^k}$$

* * * *

16

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} \qquad \forall x \in [0,1]$$

حيث n عنصر من IN

1- بين أن $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}\, dx = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \int_0^1 x^n f(x)\, dx$

2- استنتج قيمة $\int_0^1 f(x)\, dx$

1- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}\, dx = \int_0^1 (1+x^n)^{-\frac{1}{n}}\, dx$

$$= \left[x(1+x^n)^{-\frac{1}{n}}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(-\frac{1}{n}\right)(n x^{n-1})(1+x)^{-\frac{1}{n}-1}\, dx$$

$$= 2^{-\frac{1}{n}} + \int_0^1 x^n \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n+1}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)\sqrt[n]{x^n+1}}\, dx$$

إذن $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}\, dx = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \int_0^1 x^n f(x)\, dx$

2- الاستنتاج

لدينا $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 [(x^n+1) - x^n] f(x)\, dx$

$$= \int_0^1 (x^n+1) f(x)\, dx - \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}\, dx - \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

وحسب السؤال الأول يكون لدينا

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

* * * *

17

ليكن α عددا حقيقيا بحيث $-1 < \alpha < 1$

1- باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب التكامل التالي

$$I_\alpha = \int_0^\alpha \sqrt{1-x^2}\,dx$$

2- احسب التكاملين التاليين

$$J_\alpha = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

$$K_\alpha = \int_{-1}^{2\alpha-1} \sqrt{-x^2-2x+3}\,dx \qquad \text{(يمكنك وضع } t = \frac{x+1}{2}\text{)}$$

1- حساب التكامل I_α

نعتبر الدالتين العدديتين u و v بحيث

$$\forall x \in [0,\alpha] \qquad u(x) = x$$

$$\forall x \in [0,\alpha] \qquad v(x) = \sqrt{1-x^2}$$

لدينا

$$I_\alpha = \int_0^\alpha u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [u(x)\,v(x)]_0^\alpha - \int_0^\alpha u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= \alpha\sqrt{1-\alpha^2} - \int_0^\alpha x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \alpha\sqrt{1-\alpha^2} + \int_0^\alpha \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ليكن x عنصرا من $[0,\alpha]$. لدينا

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ومنه

$$\int_0^\alpha \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\alpha -\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= -I_\alpha + [\operatorname{Arcsin} x]_0^\alpha$$

$$= -I_\alpha + \operatorname{Arcsin}\alpha$$

إذن

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\alpha$$

2- حساب التكامل J_α

ليكن x عنصرا من $[0,\alpha]$. لدينا

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ومنه

$$J_\alpha = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^\alpha \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= [\operatorname{Arcsin} x]_0^\alpha - [-\sqrt{1-x^2}\,]_0^\alpha$$

$$= \operatorname{Arc\,sin}\alpha + \sqrt{1-\alpha^2} - 1$$

حساب التكامل K_α

ليكن x عنصرا من $[-1, 2\alpha-1]$. لدينا

$$-x^2-2x+3 = -(x^2+2x)+3$$

$$= -[(x+1)^2-1]+3$$

$$= 4-(x+1)^2$$

$$= 4\left(1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)$$

ومنه

$$\sqrt{-x^2-2x+3} = 2\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

نضع $t = \frac{x+1}{2}$ ومنه $dt = \frac{1}{2}dx$ أي $dx = 2dt$

إذا كان $x = -1$ فإن $t = 0$

إذا كان $x = 2\alpha - 1$ فإن $t = \alpha$

ومنه

$$K_\alpha = \int_0^\alpha 2\sqrt{1-t^2}\;2\,dt$$

$$= 4\int_0^\alpha \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= 4\,I_\alpha$$

إذن

$$K_\alpha = 2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + 2\operatorname{Arc\,sin}\alpha$$

* * * *

18

1- حدد دالة أصلية للدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$$

2- استنتج التكامل التالي :

$$I = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

1-أ- الدالة الاصلية للدالة f

لتكن F الدالة الاصلية للدالة f التي تنعدم في 0.

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+4}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

إذن الدالة F المعرفة بما يلي دالة أصلية للدالة f.

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

2- حساب التكامل I

لدينا $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

لدينا $\forall x \in IR \qquad F'(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

ولدينا $\forall x \in IR \qquad \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2F(x)$

إذن

$$I = \int_0^2 2F(x)F'(x)\,dx$$

$$= [F^2(x)]_0^2$$

$$= F^2(2) - F^2(0)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(1)\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{64}$$

* * * *

19

1-أ- باستعمال المكاملة بتغيير المتغير احسب التكامل التالي

$$I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

(ضع $t = x - \sqrt{x^2-1}$)

ب- باستعمال المكاملة بالاجزاء استنتج التكامل التالي

$$J = \int_2^3 \sqrt{x^2-1}\,dx$$

2- احسب التكامل

$$K = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+x-\frac{3}{4}}}\,dx$$

1- حساب التكامل I

نضع $t = x - \sqrt{x^2-1}$ ويكون لدينا

$$dt = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \frac{-t}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

ومنه $-\dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

إذا كان $x = 2$ فإن $t = 2-\sqrt{3}$

إذا كان $x = 3$ فإن $t = 3-2\sqrt{2}$

إذن

$$I = \int_{2-\sqrt{3}}^{3-2\sqrt{2}} -\frac{dt}{t}$$

$$= [-\ln t]_{2-\sqrt{3}}^{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \ln(2-\sqrt{3}) - \ln(3-2\sqrt{2})$$

ب- الاستنتاج

نعتبر الدالتين العدديتين u و v بحيث

$\forall x \in [2,3] \qquad u(x) = x$

$\forall x \in [2,3] \qquad v(x) = \sqrt{x^2-1}$

لدينا

$$J = \int_2^3 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [u(x)v(x)]_2^3 - \int_2^3 u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= [x\sqrt{x^2-1}]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

ولدينا

$$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_2^3 \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$$

$$= \int_2^3 \sqrt{x^2-1}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= J + I$$

ومنه $J = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - (I + J)$

إذن $J = 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2} I$

ومنه $J = 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$

2- حساب التكامل K

ليكن x عنصرا من $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

نضع $t = x + \frac{1}{2}$ ويكون لدينا

$$dt = dx$$

وإذا كان $x = \frac{3}{2}$ فإن $t = 2$

وإذا كان $x = \frac{5}{2}$ فإن $t = 3$

إذن

$$K = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 1}}\,dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

$$= I$$

ومنه $K = \ln(2-\sqrt{3}) - \ln(3-2\sqrt{2})$

* * * *

20

1-أ- باستعمال المكاملة بتغيير المتغير احسب التكامل التالي

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(ضع $t = x + \sqrt{1+x^2}$)

ب- باستعمال المكاملة بالاجزاء استنتج التكامل التالي

$$J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

2- احسب التكامل التالي

$$K = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

1- حساب التكامل I

نضع $t = x + \sqrt{1+x^2}$ ومنه

$$dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

إذن $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

إذا كان $x = 0$ فإن $t = 1$

إذا كان $x = 1$ فإن $t = 1 + \sqrt{2}$

ومنه

$$I = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t}$$

$$= [\ln t]_1^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

ب- الاستنتاج

نعتبر الدالتين العدديتين u و v بحيث

$u'(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$v(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in [0,1]$

لدينا

$$J = \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= [x\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2} - \left[\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right]$$

$$= \sqrt{2} - (J - I)$$

ومنه $2J = \sqrt{2} + I$

إذن $J = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

2- حساب التكامل K

ليكن x عنصرا من [-1,0]

لدينا $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$

نضع $t = x + 1$ ويكون لدينا $dt = dx$

إذا كان $x = -1$ فإن $t = 0$ وإذا كان $x = 0$ فإن $t = 1$

ومنه
$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$
$$= I$$

إذن $K = \ln(1+\sqrt{2})$

* * * *

21

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-e^t}}\,dt$$

1- باستعمال المكاملة بتغيير المتغير $(u = \sqrt{1-e^t})$ بين أنه مهما يكن x من IR_+^* فإن

$$f(x) = \int_{\sqrt{1-e}}^{\sqrt{1-e^x}} 2\frac{du}{u^2-1}$$

2- بين أنه مهما يكن x من $IR-\{-1,1\}$ فإن

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

3- استنتج أنه مهما يكن x من IR_-^* فإن

$$f(x) = 2\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e}}\right) - x + 1$$

1- اثبات النتيجة الاولى

ليكن x عنصرا من IR_-^*. و t عنصرا من IR_+^*

نضع $u = \sqrt{1-e^t}$ ومنه $u^2 = 1 - e^t$

أي $e^t = 1 - u^2$

ومنه $e^t . dt = -2u\,du$ أي $dt = \frac{-2u}{1-u^2}\,du$

إذا كان $t = 1$ فإن $u = \sqrt{1-e}$

إذا كان $t = x$ فإن $u = \sqrt{1-e^x}$

إذن
$$f(x) = \int_{\sqrt{1-e}}^{\sqrt{1-e^x}} \frac{1}{u} . \frac{-2u}{1-u^2}\,du$$
$$= \int_{\sqrt{1-e}}^{\sqrt{1-e^x}} \frac{2}{u^2-1}\,du$$

2- اثبات النتيجة الثانية

ليكن x عنصرا من $IR-\{-1,1\}$. لدينا

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1}$$
$$= \frac{2}{x^2-1}$$

إذن
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

3- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_-^*. و t عنصرا من $IR-\{-1,1\}$

لدينا
$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$$

ومنه
$$f(x) = \int_{\sqrt{1-e}}^{\sqrt{1-e^x}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= [\ln(1-u) - \ln(u+1)]_{\sqrt{1-e}}^{\sqrt{1-e^x}}$$
$$= \left[\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\right]_{\sqrt{1-e}}^{\sqrt{1-e^x}}$$
$$= \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1+\sqrt{1-e^x}}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-e}}{1+\sqrt{1-e}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1-\sqrt{1-e^x})^2}{e^x}\right) - \ln\left(\frac{(1-\sqrt{1-e})^2}{e}\right)$$
$$= 2\ln(1-\sqrt{1-e^x}) - x - 2\ln(1-\sqrt{1-e}) + 1$$

إذن لكل x من IR_-^* فإن

$$f(x) = 2\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e}}\right) - x + 1$$

* * * *

22

ليكن f دالة عددية متصلة على [-a,a] $(a \in IR_+^*)$

نضع
$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

1- بين أن
$$I = \int_0^a (f(t) + f(-t))\,dt$$

2-أ- استنتج أنه إذا كانت f زوجية فإن $I = 2\int_0^a f(t)\,dt$

ب- استنتج أنه إذا كانت f فردية فإن $I = 0$

3- احسب التكامل التالي

$$J = \int_0^1 (\sqrt{1-t^3} - \sqrt{1+t^3})\,dt$$

2- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا
$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

نضع $t = -x$ ومنه $dt = -dx$. إذن
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt)$$
$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$$
$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

ومنه
$$I = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$
$$= \int_{0}^{a} (f(t) + f(-t))\,dt$$

إذن
$$I = \int_{0}^{a} (f(t) + f(-t))\,dt$$

2-أ- الاستنتاج الاول

نفترض أن f زوجية ومنه
$$\forall t \in [-a,a] \qquad f(-t) = f(t)$$

وحسب السؤال الاول يكون لدينا
$$I = \int_{0}^{a} 2f(t)\,dt$$
$$= 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

ب- الاستنتاج الثاني

نفترض أن f فردية ومنه
$$\forall t \in [-a,a] \qquad f(-t) = -f(t)$$

وحسب السؤال الاول يكون لدينا
$$I = \int_{0}^{a} (f(t) - f(t))\,dt$$
$$= \int_{0}^{a} 0\,.\,dt$$
$$= 0$$

3- حساب التكامل J

لدينا $J = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ ، حيث f هي الدالة العددية المعرفة بما يلي
$$\forall t \in [-1,1] \qquad f(t) = \sqrt{1 - t^3} - \sqrt{1 + t^3}$$

الدالة f فردية لانه إذا كان t عنصرا من $[-1,1]$ فإن
$$f(-t) = \sqrt{1 + t^3} - \sqrt{1 - t^3}$$
$$= -f(t)$$

وحسب السؤال الثاني الجزء ب منه لدينا $J = 0$

* * * *

23

1- لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

بين أن
$$\int_{a}^{b} f(a + b - x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

2- احسب التكامل
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos t} - \sqrt{\sin t})\,dt$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

نضع $t = a + b - x$. لدينا $dt = -dx$

إذا كان $x = a$ فإن $t = b$

$x = b$ فإن $t = a$

ومنه
$$\int_{a}^{b} f(a + b - x)\,dx = \int_{b}^{a} f(t)\,(-dt)$$
$$= -\int_{b}^{a} f(t)\,dt$$
$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

2- حساب التكامل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي
$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \qquad f(t) = \sqrt{\cos t} - \sqrt{\sin t}$$

لدينا f متصلة على $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ وحسب السؤال الاول لدينا
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - t\right)dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt$$

ولدينا $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sqrt{\sin t}-\sqrt{\cos t}$ $\quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

أي $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-f(t)$ $\quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

ومنه
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -f(t)\,dt$$
$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt$$

إذن
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos t}-\sqrt{\sin t})\,dt = 0$$

* * * *

24

لتكن f دالة متصلة على [a,b] بحيث

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x)=f(a+b-x)$$

1- بين أن $\displaystyle\int_a^b t f(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt$

2- تطبيق. احسب التكامل التالي

$$I=\int_0^{\pi} t \sin t\,dt$$

1- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا $f(x)=f(a+b-x)$ $\quad \forall x \in [a,b]$

ومنه
$$\int_a^b t\,f(t)\,dt = \int_a^b t\,f(a+b-t)\,dt$$

نضع $u=a+b-t$ ويكون لدينا $du=-dt$ و $t=a+b-u$

وإذا كان $t=a$ فإن $u=b$

$t=b$ فإن $u=a$

ومنه
$$\int_a^b t\,f(t)\,dt = \int_b^a (a+b-u)\,f(u)\,(-du)$$
$$= -\int_b^a (a+b-u)\,f(u)\,du$$
$$= \int_a^b [(a+b)\,f(u)-u\,f(u)]\,du$$
$$= \int_a^b (a+b)\,f(u)\,du - \int_a^b u\,f(u)\,du$$
$$= (a+b)\int_a^b f(u)\,du - \int_a^b t\,f(t)\,dt$$

إذن
$$2\int_a^b t\,f(t)\,dt = (a+b)\int_a^b f(u)\,du$$

أي
$$\int_a^b t\,f(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(u)\,du$$

2- تطبيق

إذا اعتبرنا الدالة sin فإنه حسب السؤال الاول يكون لدينا

$$\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin t\,.\,dt$$

علما أن $\sin(\pi-x)=\sin x$ $\quad \forall x \in [0,\pi]$

ومنه
$$I=\frac{\pi}{2}[-\cos t]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{\pi}{2}(-1-1)$$
$$=\pi$$

* * * *

25

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على [a,b] بحيث "f متصلة على [a,b].

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a,b] \qquad g(x)=(f''(x)+f(x))\sin(x-a)$$

أ- حدد دالة أصلية للدالة g

ب- استنتج التكامل $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$

2- نفترض أن $b-a=\pi$ وأن $f(x)>0$ $\;(\forall x \in [a,b])$

بين أن $f''(\alpha)+f(\alpha)>0$ $\;(\exists \alpha \in [a,b])$

1-أ- الدالة الاصلية للدالة g

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a,b] \qquad \varphi(x)=f(x)\sin(x-a)$$

لدينا $g(x)=f''(x)\sin(x-a)+\varphi(x)$ $\quad \forall x \in [a,b]$

وليكن x عنصرا من [a,b]. لدينا

$$\varphi'(x)=f'(x)\sin(x-a)+f(x)\cos(x-a)$$

ومنه
$$\varphi''(x)=f''(x)\sin(x-a)+2f'(x)\cos(x-a)-f(x)\sin(x-a)$$
$$=g(x)-\varphi(x)+2f'(x)\cos(x-a)-\varphi(x)$$
$$=g(x)+2[f'(x)\cos(x-a)-f(x)\sin(x-a)]$$
$$=g(x)+2\psi'(x)$$

حيث ψ هي الدالة المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [a,b] \qquad \psi(x) = f(x)\cos(x-a)$$

ومنه $g(x) = \varphi''(x) - 2\psi'(x)$

إذن $\varphi' - 2\psi$ هي دالة أصلية للدالة g وهي معرفة بما يلي

$$\forall x \in [a,b] \qquad (\varphi' - 2\psi)(x) = f'(x)\sin(x-a) - f(x)\cos(x-a)$$

ب- الاستنتاج

لدينا $\varphi' - 2\psi$ دالة أصلية للدالة g ومنه

$$\int_a^b g(x)\,dx = [(\varphi' - 2\psi)(x)]_a^b$$

$$= (\varphi' - 2\psi)(b) - (\varphi' - 2\psi)(a)$$

لدينا $(\varphi' - 2\psi)(b) = f'(b)\sin(b-a) - f(b)\cos(b-a)$

$$(\varphi' - 2\psi)(a) = f'(a)\sin(a-a) - f(a)\cos(a-a) = -f(a)$$

إذن $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = f'(b)\sin(b-a) - f(b)\cos(b-a) + f(a)$

2- وجود العدد الحقيقي α

لدينا $b - a = \pi$ ومنه

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(b) + f(a)$$

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا :

$$\exists \alpha \in]a,b[\qquad \int_a^b g(x)\,dx = (b-a)\,g(\alpha)$$

ومنه $\exists \alpha \in]a,b[\qquad f(b) + f(a) = \pi\, g(\alpha)$

وبما أن $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ فإن $f(b) + f(a) > 0$

إذن $g(\alpha) > 0$ أي $(f''(\alpha) + f(\alpha))\sin(\alpha - a) > 0$

لدينا $0 < \alpha - a < \pi$ ومنه $\sin(\alpha - a) > 0$

وبالتالي فإن $f''(\alpha) + f(\alpha) > 0$

* * * *

26

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على IR وتزايدية قطعا على IR.

1- بين أنه مهما يكن x من $f(IR)$ فإن

$$\int_{f(0)}^{x} f^{-1}(t)\,dt = x f^{-1}(x) - \int_0^{f^{-1}(x)} f(t)\,dt$$

أ- استنتج أنه مهما يكن a من IR و b من $f(IR)$ فإن

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_{f(0)}^b f^{-1}(t)\,dt \geq ab$$

3- بين أنه مهما يكن a عنصرا من IR و b عنصرا من IR^+ فإن

$$ea + b\ln\left(\frac{b}{e}\right) \geq ab$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $f(IR)$. و t عنصرا من $f(IR)$

نضع $u = f^{-1}(t)$ ومنه $f(u) = t$

إذن $dt = f'(u)\,du$

إذا كان $t = f(0)$ فإن $u = 0$

إذا كان $t = x$ فإن $u = f^{-1}(x)$

ومنه

$$\int_{f(0)}^{x} f^{-1}(t)\,dt = \int_0^{f^{-1}(x)} u\, f'(u)\,du$$

$$= [u f(u)]_0^{f^{-1}(x)} - \int_0^{f^{-1}(x)} f(u)\,du$$

$$= x f^{-1}(x) - \int_0^{f^{-1}(x)} f(u)\,du$$

إذن مهما يكن x من $f(IR)$ فإن

$$\int_{f(0)}^{x} f^{-1}(t)\,dt = x f^{-1}(x) - \int_0^{f^{-1}(x)} f(t)\,dt$$

2- الاستنتاج

ليكن a عنصرا من IR و b عنصرا من $f(IR)$

حسب السؤال الاول لدينا

$$\int_{f(0)}^{b} f^{-1}(t)\,dt = b f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,dt$$

نضع $\displaystyle X = \int_0^a f(t)\,dt + \int_{f(0)}^b f^{-1}(t)\,dt$

ويكون لدينا

$$X = \int_0^a f(t)\,dt + b f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(t)\,dt + \int_{f^{-1}(b)}^0 f(t)\,dt + b f^{-1}(b)$$

$$= \int_{f^{-1}(b)}^a f(t)\,dt + b f^{-1}(b)$$

الحالة الاولى : $f^{-1}(b) < a$

حسب القيمة المتوسطة للتكامل لدينا

$$\exists c \in]f^{-1}(b), a[\qquad \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(t)\,dt = (a - f^{-1}(b))\, f(c)$$

ومنه $X = (a - f^{-1}(b))\, f(c) + b f^{-1}(b)$

لدينا $f^{-1}(b) < c < a$ والدالة f تزايدية قطعا على IR

ومنه $f(f^{-1}(b)) < f(c)$ أي $b < f(c)$

وبما أن $a - f^{-1}(b) > 0$ فإن $b(a - f^{-1}(b)) < (a - f^{-1}(b))\, f(c)$

إذن $b f^{-1}(b) + b(a - f^{-1}(b)) < X$ أي $ab < X$

الحالة الثانية : $f^{-1}(b) = a$

لدينا في هذه الحالة $X = b f^{-1}(b)$ أي $X = ab$

الحالة الثالثة : $f^{-1}(b) > a$

لدينا

$$\exists c \in]a, f^{-1}(b)[\qquad \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(t)\,dt = (a - f^{-1}(b))\, f(c)$$

لدينا $c < f^{-1}(b)$ و f تزايدية قطعا على IR ومنه

$f(c) < b$ ومنه $(a - f^{-1}(b))\, f(c) > b(a - f^{-1}(b))$

إذن $X > ab$

وبالتالي فإنه مهما يكن a من IR و b من f (IR) فإن

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_{f(0)}^{b} f^{-1}(t)\,dt \geq ab$$

3- تطبيق

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x) = e^x$

لدينا f قابلة الاشتقاق على IR وتزايدية قطعا على IR

لدينا $f(IR) = IR^+$ و $f^{-1}(x) = \ln x \quad \forall x \in IR$

ليكن a عنصرا من IR و b عنصرا من +IR. حسب السؤال الثاني لدينا

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_{f(0)}^{b} f^{-1}(t)\,dt \geq ab$$

أي

$$\int_0^a e^t\,dt + \int_1^b \ln t\,dt \geq ab$$

لدينا

$$\int_1^b \ln t\,dt = [t \ln t]_1^b - \int_1^b t\,\frac{1}{t}\,dt$$

$$= b \ln b - [t]_1^b$$

$$= b \ln b - b + 1$$

ولدينا

$$\int_0^a e^t\,dt = e^a - 1$$

إذن $e^a + b(\ln b - 1) \geq ab$

أي $e^a + b \ln\left(\frac{b}{e}\right) \geq ab$

* * * *

27

لتكن f دالة متصلة على $[0,\pi]$ بحيث

$$\int_0^\pi f(t) \cos t\,dt = \int_0^\pi f(t) \sin t\,dt = 0$$

1- بين أن $\exists \alpha \in]0,\pi[\qquad f(\alpha) = 0$

2- نفترض أن f تنعدم فقط في α، ولتكن F الدالة الاصلية للدالة $t \to f(t) \cos t$ التي تنعدم في 0.

أ- بين أنه إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$ فإن

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad F(x) = 0$$

ب- بين أنه إذا كان $\alpha < \frac{\pi}{2}$ فإن

$$\exists \beta \in \left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right[\qquad F(\beta) = 0$$

3- استنتج أنه يوجد عنصران مختلفان α و β من $]0,\pi[$ بحيث

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

1- وجود العدد α

حسب القيمة المتوسطة للتكامل لدينا

$$\exists \alpha \in]0,\pi[\qquad \int_0^\pi f(t) \sin t\,dt = \pi f(\alpha) \sin \alpha$$

ومنه $\exists \alpha \in]0,\pi[\qquad f(\alpha) \sin \alpha = 0$

أي $\exists \alpha \in]0,\pi[\qquad f(\alpha) = 0$

2-أ- انعدام الدالة F

بما أن f متصلة على $[0,\pi]$ و f تنعدم فقط في $\frac{\pi}{2}$ فإن

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& f(x) < 0 \\ \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & f(x) > 0 \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& f(x) > 0 \\ \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & f(x) < 0 \end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& f(x) \cos x < 0 \\ \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & f(x) \cos x < 0 \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[& f(x)\cos x > 0 \\ \forall x \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right] & f(x)\cos x > 0 \end{cases}$$

ومنه $\forall x \in [0,\pi] \quad f(x)\cos x \leq 0$

أو $\forall x \in [0,\pi] \quad f(x)\cos x \geq 0$

نفترض أن $f(x)\cos x \leq 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$

بما أن $F'(x) = f(x)\cos x \quad \forall x \in [0,\pi]$ فإن F تناقصية على $[0,\pi]$

ومنه $F(\pi) \leq F(x) \leq F(0) \quad \forall x \in [0,\pi]$

وبما أن $F(\pi) = \int_0^{\pi} f(t)\cos t\, dt$ فإن $F(\pi) = 0$ وبما أن $F(0) = 0$ فإن

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$$

وبالمثل نجد نفس النتيجة إذا افترضنا أن $f(x)\cos x \geq 0 \quad (\forall x \in [0,\pi])$

إذن $F(x) = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$

ب- وجود العدد β

لدينا حالتين بالنسبة للاشارة $F'(x) \quad (x \in [0,\pi])$

الحالة الاولى

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$		π
f(x)		-	0	+		+	
cos x		+		+	0	-	
F'(x)		-	0	+	0	-	

لدينا F تناقصية قطعا على $[0,\alpha]$ ومنه $F(\alpha) < F(0)$ أي $F(\alpha) < 0$

ولدينا F تناقصية قطعا على $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ومنه $F(\pi) < F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ أي $0 < F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذن $F(\alpha)\, F\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

وبما أن F متصلة على $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا

$$\exists \beta \in \left]\alpha,\frac{\pi}{2}\right[\quad F(\beta) = 0$$

الحالة الثانية

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$		π
f(x)		+	0	-		-	
cos x		+		+	0	-	
F'(x)		+	0	-	0	+	

في هذه الحالة لدينا $F(\alpha) > 0$ و $F\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

ومنه $F(\alpha)F\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

إذن $F(\beta) = 0 \quad \exists \beta \in \left]\alpha,\frac{\pi}{2}\right[$

3- الاستنتاج

حسب السؤال الاول لدينا $f(\alpha) = 0 \quad \exists \alpha \in]0,\pi[$

إذا كانت f تنعدم فقط في α و $\alpha = \frac{\pi}{2}$ فإنه حسب السؤال الثاني الجزء أ منه

لدينا $F(x) = 0 \quad \forall x \in]0,\pi[$

ومنه $F'(x) = 0 \quad \forall x \in]0,\pi[$

أي $f(x)\cos x = 0 \quad \forall x \in]0,\pi[$

إذن $f(x) = 0 \quad \forall x \in]0,\pi[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

وهذا يخالف الافتراض :

إذا كانت f تنعدم فقط في α وأن $\alpha < \frac{\pi}{2}$ فإنه حسب السؤال الثاني الجزء ب منه لدينا

$$F(\beta) = 0 \quad \exists \beta \in \left]\alpha,\frac{\pi}{2}\right[$$

أي $\int_0^{\beta} f(t)\cos t = 0 \quad \exists \beta \in \left]\alpha,\frac{\pi}{2}\right[$

وحسب القيمة المتوسطة للتكامل لدينا

$$\int_0^{\beta} f(t)\cos t = \beta\, f(\gamma)\cos\gamma \quad \exists \gamma \in]0,\beta[$$

ومنه $f(\gamma) = 0 \quad \exists \gamma \in]0,\beta[$

وهذا يخالف معطى التمرين

وبالمثل نبين أنه إذا كانت $\alpha > \frac{\pi}{2}$ وأن f تنعدم فقط في α فإن

$$F(\beta) = 0 \quad \exists \beta \in \left]\frac{\pi}{2},\alpha\right[$$

ومنه $f(\gamma) = 0 \quad \exists \gamma \in]0,\beta[$

وهذا يخالف الافتراض

إذن f لا تنعدم فقط في α ومنه $f(\beta) = 0 \quad \exists \beta \in]0,\pi[- \{\alpha\}$

* * * *

28

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt \quad \forall x \in IR_+$$

- 1 بين أن $1-\frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1 \quad \forall t \in IR^+$

- 2 استنتج أن $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in IR^+$

- 3 استنتج أنه لكل x من IR^+ فإن

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{4}{3} \leq \frac{2x-4}{3}\sqrt{1+x} \leq \frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}$$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن t عنصرا من IR^+

* لدينا $1+t \geq 1$ أي $\sqrt{1+t} \geq 1$

ومنه $\frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1$

* لدينا

$$1-\frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{t}{2}(\sqrt{1+t}+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{1+t}+1)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{1+t}+1)\sqrt{1+t}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t+\sqrt{1+t}$$

وبما أن $\sqrt{1+t} \geq 1$ فإن $t+\sqrt{1+t} \geq 1$

إذن $1-\frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}}$

* وبالتالي فإن $1-\frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1 \quad \forall t \in IR^+$

2- الاستنتاج الأول

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا $1-\frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1 \quad \forall t \in [0,x]$

ومنه $t-\frac{t^2}{2} \leq \frac{t}{\sqrt{1+t}} \leq t \quad \forall t \in [0,x]$

إذن $\int_0^x \left(t-\frac{t^2}{2}\right)dt \leq \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt \leq \int_0^x t.\,dt$

أي $\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \leq f(x) \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

أي $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2}$

إذن $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in IR_+$

3- الاستنتاج الثاني

ليكن x عنصرا من IR_+ . لدينا

$$f(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$$

$$=\int_0^x \left(\frac{t+1}{\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)dt$$

$$=\int_0^x (1+t)^{\frac{1}{2}}dt-\int_0^x (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x-[2(1+t)^{\frac{1}{2}}]_0^x$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-\frac{2}{3}-2\sqrt{1+x}+2$$

$$=\left(\frac{2}{3}(x+1)-2\right)\sqrt{1+x}+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{2x-4}{3}\sqrt{1+x}+\frac{4}{3}$$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{4}{3} \leq \frac{2x-4}{3}\sqrt{1+x} \leq \frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}$$

* * * *

29

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(x)=\sqrt[3]{4-\cos^2 x}$$

- 1 بين أن $\sqrt[3]{3} \leq f(x) \leq \sqrt[3]{\frac{7}{2}} \quad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

- 2 استنتج $1,13 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) < 1,20$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

لدينا الدالة cos تناقصية على $[0,\pi]$ ومنه

$$\cos\frac{\pi}{4} \leq \cos x \leq 1$$

ومنه $\frac{1}{2} \leq \cos^2 x \leq 1$

أي $-1 \leq -\cos^2 x \leq -\frac{1}{2}$

ومنه $3 \leq 4 - \cos^2 x \leq \frac{7}{2}$

إذن $\sqrt[3]{3} \leq \sqrt[3]{4 - \cos^2 x} \leq \sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

وبالتالي فإن $\sqrt[3]{3} \leq f(x) \leq \sqrt[3]{\frac{7}{2}} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2- الاستنتاج

لدينا $\sqrt[3]{3} \leq f(x) \leq \sqrt[3]{\frac{7}{2}} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ومنه
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{3}\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{7}{2}}\, dx$$

أي
$$\sqrt[3]{3}\, [x]_0^{\frac{\pi}{4}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \sqrt[3]{\frac{7}{2}}\, [x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

بمعنى أن
$$\sqrt[3]{3} \cdot \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \sqrt[3]{\frac{7}{2}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

وباستعمال الآلة الحاسبة نجد أن

$$\sqrt[3]{\frac{7}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \approx 1{,}190$$

$$\sqrt[3]{3} \cdot \frac{\pi}{4} \approx 1{,}132$$

ومنه
$$1{,}13 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx < 1{,}20$$

* * * *

30

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f(x) = \int_0^1 \sqrt{1 - t^x}\, dt$$

1- ليكن x عنصرا من IR_+^*

بين أن $\forall t \in [0, 1] \quad 1 - t^x \leq \sqrt{1 - t^x} \leq 1 - \frac{1}{2} t^x$

2- استنتج أن $\forall x \in IR_+^* \quad \frac{x}{x+1} < f(x) < \frac{2x+1}{2(x+1)}$

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن t عنصرا من [0, 1]

* لدينا $0 \leq t \leq 1$ ومنه $0 \leq t^x \leq 1$

إذن $0 \leq 1 - t^x \leq 1$

ومنه $(1 - t^x)^2 \leq 1 - t^x$

أي $1 - t^x \leq \sqrt{1 - t^x}$

* لدينا $\sqrt{1 - t^x} \leq 1 - \frac{1}{2} t^x \Leftrightarrow 1 - t^x \leq 1 + \frac{1}{4}(t^x)^2 - t^x$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{4}(t^x)^2$

ومنه $\sqrt{1 - t^x} \leq 1 - \frac{1}{2} t^x$

* إذن $\forall t \in [0, 1] \quad 1 - t^x \leq \sqrt{1 - t^x} \leq 1 - \frac{1}{2} t^x$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا $\forall t \in [0, 1] \quad 1 - t^x \leq \sqrt{1 - t^x} \leq 1 - \frac{1}{2} t^x$

ومنه
$$\int_0^1 (1 - t^x)\, dt \leq \int_0^1 \sqrt{1 - t^x}\, dt \leq \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} t^x\right) dt$$

لدينا
$$\int_0^1 (1 - t^x)\, dt = \left[t - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

ولدينا
$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} t^x\right) dt = \left[1 - \frac{t^{x+1}}{2(x+1)}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{2x+1}{2(x+1)}$$

إذن $\frac{x}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{2(x+1)}$

* * * *

31

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال [a, b]

نضع $I = \int_a^b f^2(t)\, dt$ و $J = \int_a^b g^2(t)\, dt$

$$K = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$$

1- أ- بين أن $\forall x \in IR \quad Ix^2 + 2Kx + J \geq 0$

ب- استنتج أن $|K| \leq \sqrt{IJ}$

2- تطبيق : بين أن $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+x+1}\;dx \le \frac{\sqrt{66}}{6}$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR . لدينا

$$I x^2 + 2 K x + J = x^2 \int_a^b f^2(t)\,dt + 2x \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt$$

$$= \int_a^b x^2 f^2(t)\,dt + \int_a^b 2x f(t) g(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (x^2 f^2(t) + 2x f(t) g(t) + g^2(t))\,dt$$

$$= \int_a^b (x f(t) + g(t))^2\,dt$$

وبما أن $(x f(t) + g(t))^2 \ge 0 \quad \forall t \in [a, b]$ فإن

$$\int_a^b (x f(t) + g(t))^2\,dt \ge 0$$

إذن $Ix^2 + 2Kx + J \ge 0$

وبالتالي فإن $(\forall x \in IR)\; I x^2 + 2 K x + J \ge 0$

ب- الاستنتاج

لدينا $(\forall x \in IR)\; I x^2 + 2 K x + J \ge 0$

ومنه IR هي مجموع حلول المتراجحة

$$I x^2 + 2 K x + J \ge 0$$

لدينا $\forall x \in [a, b]\;\; f^2(t) \ge 0$ ومنه $I \ge 0$

إذا كان $I = 0$ فإن IR هي مجموعة حلول المتراجحة $2 K x + J \ge 0$

ومنه $K = 0$ و $J = 0$

إذن إذا كان $I = 0$ فإن $|K| \le \sqrt{I.J}$

إذا كان $I \ne 0$ فإن المميز المختصر للمعادلة $Ix^2 + 2Kx + J \ge 0$ سالب قطعا

أي $K^2 - IJ < 0$

ومنه $K^2 < I.J$ أي $|K| < \sqrt{IJ}$

وبالتالي فإن $|K| \le \sqrt{IJ}$

3- تطبيق

لتكن f هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 1$$

ولتكن g هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [0, 1] \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

لدينا

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 g^2(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + t + 1)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$$

وحسب السؤال الأول الجزء ب منه لدينا

$$\left|\int_0^1 \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx\right| \le \sqrt{\frac{11}{6}}$$

وبما أن $\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$ لكل x من $[0, 1]$ فإن

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx \ge 0$$

ومن

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx \le \frac{\sqrt{66}}{6}$$

* * * *

32

لتكن f دالة عددية متصلة على $[0, 1]$ بحيث

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \int_x^1 f(t)\,dt \ge \frac{1 - x^2}{2}$$

لتكن F دالة أصلية للدالة f على $[0, 1]$

1- بين أن $\displaystyle F(1) = \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx$

2- استنتج أن : أ- $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx \ge \frac{1}{3}$

ب- $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,dx \ge \frac{1}{3}$

1- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا F دالة أصلية للدالة f على $[0, 1]$ ومنه $F' = f$

إذن $$\int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 (x F'(x) + F(x))\,dx$$
$$= [x F(x)]_0^1$$
$$= F(1)$$

ومنه $$F(1) = \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx$$

2-أ- الاستنتاج الأول

حسب السؤال الأول يكون لدينا

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = F(1) - \int_0^1 F(x)\,dx$$

ولدينا $$\forall x \in [0, 1] \quad \int_x^1 f(t)\,dt = F(1) - F(x)$$

لأن F دالة أصلية للدالة f

وبما أن $$(\forall x \in [0, 1]) \quad \int_x^1 f(t)\,dt \geq \frac{1-x^2}{2}$$

فإن $$(\forall x \in [0, 1])\; F(1) - F(x) \geq \frac{1-x^2}{2}$$

أي $$(\forall x \in [0, 1])\; F(x) \leq F(1) - \frac{1-x^2}{2}$$

ومنه $$\int_0^1 F(x)\,dx \leq \int_0^1 \left(F(1) - \frac{1-x^2}{2}\right) dx$$

أي $$\int_0^1 F(x)\,dx \leq \left[F(1)x - \frac{1}{2}x + \frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

بمعنى أن $$\int_0^1 F(x)\,dx \leq F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

ومنه $$\frac{1}{3} \leq F(1) - \int_0^1 F(x)\,dx$$

أي $$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 x f(x)\,dx$$

ب- الاستنتاج الثاني

لدينا $$\forall \lambda \in IR \quad \int_0^1 (f(x) + \lambda x)^2\,dx \geq 0$$

أي $$(\forall \lambda \in IR) \int_0^1 (f(x))^2\,dx + 2\int_0^1 x f(x)\,dx + \lambda^2 \int_0^1 x^2\,dx \geq 0$$

أي $$(\forall \lambda \in IR)\; \frac{1}{3}\lambda^2 + 2\lambda \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)^2\,dx \geq 0$$

إذن $$\left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)^2 - \frac{1}{3}\int_0^1 (f(x))^2\,dx \leq 0$$

ومنه $$3\left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

* * * *

33

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ $(a < b)$

1- نفترض أن f موجبة على $[a, b]$

أ- بين أن $$\forall x \in [a, b] \;\; 0 \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt$$

ب- استنتج أن $$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b] \;\; f(x) = 0$$

2- نفترض أنه يوجد عنصران من $[a, b]$ بحيث $f(\alpha) f(\beta) < 0$

بين أن $$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| < \int_a^b |f(t)|\,dt$$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a .

لدينا $$\forall x \in [a, b] \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ولدينا $F' = f$ وبما أن $\forall x \in [a, b] \;\; f(x) \geq 0$ فإن F تزايدية على $[a, b]$

ومنه $\forall x \in [a, b] \;\; F(a) \leq F(x) \leq F(b)$

أي $$\forall x \in [a, b] \quad 0 \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt$$

ب- الاستنتاج

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a

حسب السؤال الأول لدينا

$$\forall x \in [a, b] \quad 0 \leq F(x) \leq F(b)$$

إذا كان $\int_a^b f(t)\, dt = 0$ أي $F(b) = 0$ فإن $F(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

ومنه $\forall x \in [a, b] \quad F''(x) = 0$

أي $\forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0$

2- اثبات المتفاوتة المقترحة

نعلم أن $\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$

ولاثبات المتفاوتة المقترحة يكفي أن نفترض أن

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

ومنه $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt$

أو $\int_a^b f(t)\, dt = -\int_a^b |f(t)|\, dt$

أي $\int_a^b [\,|f(t)| - f(t)]\, dt = 0$

أو $\int_a^b [\,|f(t)| + f(t)]\, dt = 0$

لدينا مهما يكن X من IR فإن

$$X \leq |X| \quad \text{و} \quad -X \leq |X|$$

ومنه $\forall t \in [a, b] \quad |f(t)| - f(t) \geq 0$

$\forall t \in [a, b] \quad |f(t)| + f(t) \geq 0$

وباستعمال نتيجة السؤال الأول بالنسبة للدالة $t \longrightarrow |f(t)| - f(t)$

وبالنسب للدالة $t \longrightarrow |f(t)| + f(t)$ نجد أن

$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| - f(x) = 0$

أو $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| + f(x) = 0$

إذا كان $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| - f(x) = 0$ فإن $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$

وهذا يخالف كون $\exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2 \;\; f(\alpha) f(\beta) < 0$

إذاكان $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| + f(x) = 0$ فإن $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq 0$

وهذا يخالف كون $\exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2 \;\; f(\alpha) f(\beta) < 0$

إذن $\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| < \int_a^b |f(t)|\, dt$

34

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a, b]$ $(a < b)$ بحيث

$$\forall x, y \in [a, b] \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

ليكن α و β عنصرين من $[a, b]$ بحيث $\alpha < \beta$

1- أ- بين أن

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) dx + \int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\beta}{2}\right) dx = 2\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

ب- استنتج أن $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$

2- أ- بين أن $\int_\alpha^\beta f(\alpha + \beta - x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

ب- استنتج أن $(\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

1-أ- اثبات المتساوية المقترحة

نضع $t = \frac{x+\alpha}{2}$ ويكون لدينا

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) dx = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)\, 2\, dt$$

$$= 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)\, dt$$

وبالمثل لدينا

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\beta}{2}\right) dx = 2\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(t)\, dt$$

إذن

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) dx + \int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\beta}{2}\right) dx = 2\left(\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)\, dt + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(t)\, dt\right)$$

$$= 2\int_\alpha^\beta f(t)\, dt$$

ب- الاستنتاج

لدينا
$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(\alpha)}{2}$$

ومنه
$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) d x \leq \int_\alpha^\beta \left(\frac{f(x)}{2}+\frac{f(\alpha)}{2}\right) d x$$

أي
$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) d x \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\, d x + \int_\alpha^\beta \frac{f(\alpha)}{2} d x$$

أي
$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) dx \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\, dx + \frac{f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha) \quad (1)$$

وبالمثل نبين أن

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\beta}{2}\right) dx \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\, d x + \frac{f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) \quad (2)$$

وبجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف وبعد استعمال نتيجة السؤال السابق نجد أن :

$$2\int_\alpha^\beta f(x)\, d x \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, d x + \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$$

أي
$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$$

2-أ- اثبات المتفاوتة المقترحة

نضع $t = \alpha+\beta-x$ ويكون لدينا

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\, d x = \int_\beta^\alpha f(t)(-d t)$$

$$= \int_\alpha^\beta f(t)\, d t$$

إذن
$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\, d x = \int_\alpha^\beta f(x)\, d x$$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $[\alpha, \beta]$

لدينا
$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{(\alpha+\beta-x)+x}{2}$$

ومنه
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(\alpha+\beta-x))$$

إذن
$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) d x \leq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(x)+f(\alpha+\beta-x))\, d x$$

أي
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha) \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\, d x + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\, d x$$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, d x$$

* * * *

35

لتكن f دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$ وموجبة . لتكن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. لتكن a عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بمايلي

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+x}} f(t^2)\, d t$$

1- بين أن
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = \int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{u}} d u$$

2- استنتج أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}_+^*$ فإن

$$\frac{F(a+x)-F(a)}{2\sqrt{a+x}} \leq g(x) \leq \frac{F(a+x)-F(a)}{2\sqrt{a}}$$

3- حدد نهاية g في 0 .

1- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$ و t عنصرا من $[\sqrt{a}, \sqrt{a+x}]$

نضع $u = t^2$ ويكون لدينا

$du = 2t.\, dt$ أي $dt = \dfrac{d u}{2\sqrt{u}}$

إذا كان $t = \sqrt{a}$ فإن $u = a$

$t = \sqrt{a+x}$ فإن $u = a+x$

ومنه
$$g(x) = \int_a^{a+x} f(u) \,.\, \frac{d u}{2\sqrt{u}}$$

$$= \int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{u}} d u$$

إذن $\quad g(x) = \int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{u}}\, du \qquad \forall x \in IR_+^*$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا $\quad g(x) = \int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{u}}\, du$

لدينا $\quad \sqrt{a} \leq \sqrt{u} \leq \sqrt{a+x} \qquad \forall u \in [a, a+x]$

أي $\quad \frac{1}{2\sqrt{a+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{u}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad \forall u \in [a, a+x]$

وبما أن f موجبة أي $\forall x \in IR \quad f(x) \geq 0$ فإن

$$\frac{f(u)}{2\sqrt{a+x}} \leq \frac{f(u)}{2\sqrt{u}} \leq \frac{f(u)}{2\sqrt{a}} \qquad \forall u \in [a, a+x]$$

إذن

$$\int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{a+x}}\, du \leq \int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{u}}\, du \leq \int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{a}}\, du$$

لدينا

$$\int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{a}}\, du = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_a^{a+x} f(u)\, du = \frac{1}{2\sqrt{a}} [F(u)]_a^{a+x} = \frac{F(a+x) - F(a)}{2\sqrt{a}}$$

وبالمثل لدينا

$$\int_a^{a+x} \frac{f(u)}{2\sqrt{a+x}}\, du \quad \frac{F(a+x) - F(a)}{2\sqrt{a+x}}$$

إذن

$$\frac{F(a+x) - F(x)}{2\sqrt{a+x}} \leq g(x) \leq \frac{F(a+x) - F(a)}{2\sqrt{a}}$$

3- نهاية الدالة g في 0

لدينا مهما يكن x من IR_+^* فإن

$$\frac{F(a+x) - F(x)}{2\sqrt{a+x}} \leq g(x) \leq \frac{F(a+x) - F(a)}{2\sqrt{a}}$$

لدينا F متصلة في 0 لأنها قابلة للاشتقاق على IR ومنه

$$\lim_{x \to 0} F(a+x) - F(a) = 0$$

إذن

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(a+x) - F(a)}{2\sqrt{a}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(a+x) - F(a)}{2\sqrt{a+x}} = 0$$

ومنه $\quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

36

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على $[a, b]$ $(a < b)$

نفترض أن f تزايدية على $[a, b]$ وأن $g([a, b]) \subset [0, 1]$

نضع $\quad \alpha = \int_a^b g(t)\, dt$

1- أ- ادرس رتابة الدالة G المعرفة بما يلي

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

ب- بين أن : $(\forall x \in [a, b]) \quad a + G(x) \leq x$

2- نعتبر الدالتين العدديتين Ψ و φ المعرفة بمايلي

$$\Psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)\, dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) g(t)\, dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

أ- ادرس رتابة الدالة $\varphi - \Psi$

ب- استنتج أن $\quad \forall x \in [a, b] \quad \Psi(x) \leq \varphi(x)$

3- بين أن $\quad \int_a^b f(t) g(t)\, dt \geq \int_a^{a+\alpha} f(t)\, dt$

1-أ- رتابة الدالة G

الدالة G قابلة للاشتقاق على $[a, b]$

ولدينا $\quad \forall x \in [a, b] \quad G'(x) = g(x)$

وبما أن $g([a, b]) \subset [0, 1]$ فإن $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$

إذن G تزايدية على $[a, b]$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $[a, b]$

لدينا $g([a, b]) \subset [0, 1]$ ومنه

$$g(t) \leq 1 \qquad \forall t \in [a, b]$$

إذن $\quad \int_a^x g(t)\, dt \leq \int_a^x dt$

أي $\quad G(x) \leq x - a$

إذن $\quad a + G(x) \leq x \qquad \forall x \in [a, b]$

2-أ- رتابة الدالة $\psi - \varphi$

الدالة ψ قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a,b]$

ولدينا $\quad \psi'(x) = G'(x) f(a + G(x)) \qquad \forall x \in [a, b]$

أي $\quad \forall x \in [a, b] \quad \psi'(x) = g(x) f(a + G(x))$

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $[a, b]$

ولدينا $\quad \varphi'(x) = f(x) g(x) \qquad \forall x \in [a, b]$

ليكن x عنصرا من $[a, b]$ لدينا :

$$(\Psi - \varphi)'(x) = \Psi'(x) - \varphi'(x)$$
$$= g(x)\,(f(a + G(x)) - f(x)$$

لدينا $a + G(x) \le x$ والدالة f تزايدية على $[a, b]$

ومنه $f(a + G(x)) \le f(x)$

وبما أن $g(x) \ge 0$ فإن $(\psi - \varphi)'(x) \le 0$

إذن $\psi - \varphi$ تناقصية على $[a, b]$

ب- الاستنتاج

لدينا $\psi - \varphi$ تناقصية على $[a, b]$ ومنه

$$\forall x \in [a, b] \quad (\Psi - \varphi)(x) \le (\Psi - \varphi)(a)$$

لدينا
$$\Psi(a) = \int_a^{a+G(a)} f(t)\,dt$$
$$= \int_a^a f(t)\,dt$$

لأن $G(a) = 0$

ومنه $\psi(a) = 0$ وبالمثل لدينا $\varphi(a) = 0$

إذن $(\psi - \varphi)(x) \le 0 \quad \forall x \in [a, b]$

أي $\psi(x) \le \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$

3-أ- اثبات المتفاوتة المقترحة

لدينا
$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \varphi(b)$$

ولدينا $\alpha = G(b)$ ومنه
$$\int_a^{a+\alpha} f(t)\,dt = \Psi(b)$$

وبما أن $\psi(x) \le \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$ فإن $\psi(b) \le \varphi(b)$

إذن
$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \ge \int_a^{a+\alpha} f(t)\,dt$$

* * * *

37

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - (x + 1)$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس اشارة f

2- باستعمال المكاملة بتغيير المتغير $(\alpha = \text{Arcsin}\, x)$ احسب التكامل

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

3- استنتج S مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و المستقيمات المعرفة بمايلي $x = 1$ و $x = -1$ و $y = 0$

1- دراسة اشارة الدالة f

ليكن x عنصرا من $[-1, 1]$. لدينا

$$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} \ge x + 1$$
$$\Leftrightarrow 1 - x^2 \ge (x + 1)^2$$
$$\Leftrightarrow (1 + x)\,[(1 - x) - (x + 1)] \ge 0$$
$$\Leftrightarrow -2\,(1 + x)x \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x\,(1 + x) \le 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ أو } x \le 0$$

ولدينا $f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

إذن $\forall x \in [-1, 0] \quad f(x) \ge 0$

$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \le 0$

2- حساب التكامل I

ليكن x عنصرا من $[0, 1]$

نضع $\alpha = \text{Arcsin}\, x$ ولدينا $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

ومنه $x = \sin\alpha$

إذن $dx = \cos\alpha \,.\, d\alpha$

إذا كان $x = 0$ فإن $\alpha = 0$

إذا كان $x = 1$ فإن $\alpha = \frac{\pi}{2}$ إذن

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha}\,.\,\cos\alpha\,d\alpha$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\,d\alpha$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\,d\alpha$$
$$= \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

3- الاستنتاج

لدينا
$$S = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

حسب السؤال الأول لدينا

$\forall x \in [-1, 0] \quad f(x) \ge 0$

$\forall x \in [-1, 0] \quad f(x) \le 0$

إذن
$$S=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} -f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

لدينا
$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_{0}^{1}(x+1)\,dx$$
$$=I-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}$$

ولدينا
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{1}^{0} f(-t)\,(-dt)$$
$$=-\int_{1}^{0} f(-t)\,dt$$
$$=\int_{0}^{1} f(-t)\,dt$$
$$=\int_{0}^{1}\left[\sqrt{1-t^2}-(-t+1)\right]dt$$
$$=\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{0}^{1}(t-1)\,dt$$
$$=I+\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

إذن
$$S=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$$
$$=1$$

* * * *

38

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x)=\ln x-x$$

وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- ادرس تغيرات الدالة f

ب- انشئ المنحنى (C)

2- ليكن α عددا حقيقيا بحيث $0<\alpha<1$ ليكن $A(\alpha)$ مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و المستقيمات المعرفة بما يلي $x=\alpha$ و $x=1$ و $y=0$

أ- احسب $A(\alpha)$

ب- حدد $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} A(\alpha)$

1-أ- تغيرات الدالة f

* الدالة f معرفة على $\mathbb{R}_+^*$

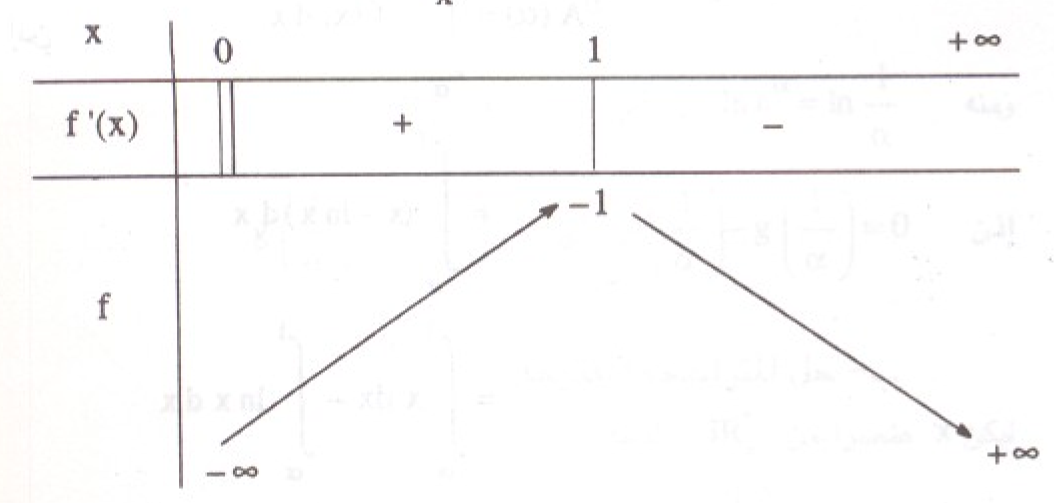
* لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)$
$=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

* ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$. لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-1$
$=\frac{1-x}{x}$



ب- انشاء المنحنى (C)

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-1$
$=-1$

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$
$=+\infty$

إذن يقبل (C) اتجاها مقاربا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = -x$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ ومنه يقبل (C) مستقيما مقاربا معادلته $x = 0$

2-أ- حساب المساحة

لدينا $\forall x \in [\alpha, 1] \quad f(x) \leq f(1)$

أي $\forall x \in [\alpha, 1] \quad f(x) \leq -1$

ومنه $\forall x \in [\alpha, 1] \quad f(x) < 0$

إذن
$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} -f(x)\,dx$$

$$= \int_{\alpha}^{1} (x - \ln x)\,dx$$

$$= \int_{\alpha}^{1} x\,dx - \int_{\alpha}^{1} \ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} \ln x\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \int_{\alpha}^{1} \ln x\,dx$$

ولدينا
$$\int_{\alpha}^{1} \ln x\,dx = \int_{\alpha}^{1} 1.\ln x\,dx$$

$$= [x \ln x]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} x.\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\alpha \ln \alpha - [x]_{\alpha}^{1}$$

$$= -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha)$$

إذن
$$A(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \ln \alpha + 1 - \alpha$$

$$= \frac{3}{2} + \alpha \ln \alpha - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

ب- حساب النهاية المقترحة

لدينا لكل α من $]0, 1[$

$$A(\alpha) = \alpha \ln \alpha + \left(\frac{3}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \left(\frac{3}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

ولدينا
$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \alpha \ln \alpha = 0$$

إذن
$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} A(\alpha) = \frac{3}{2}$$

* * * *

39

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي

$\forall x \in IR_+^* \quad f(x) = e^x - \ln x$

$\forall x \in IR_+^* \quad g(x) = e^x - \frac{1}{x}$

1- أ- ادرس تغيرات الدالة g

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث
$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \alpha < 1 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

ج- ادرس تغيرات الدالة f

2- أ- بين أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

ب- حل في IR_+^* المتراجحة $f(x) - g(x) < 0$

3- ليكن (C_f) و (C_g) منحنيي الدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم.

أ- انشئ المنحنيين (C_f) و (C_g) (ناخذ $\alpha \approx 0{,}7$)

ب- أحسب S مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) والمستقيمين المعرفين بمايلي : $x = 2$ و $x = 1$

1-أ- تغيرات الدالة g

* لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

- لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x = 1$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$

* ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$g'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad g'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ب- وجود العدد α

لدينا g متصلة على IR_+^* وتزايدية قطعا على IR_+^* ومنه g تقابل من IR_+^* نحو المجال I حيث

$$I = \left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g \ , \lim_{x\to+\infty} g\right[=]-\infty, +\infty[$$

وبما أن $0 \in I$ فإن $\exists!\, \alpha \in IR \quad g(\alpha) = 0$

بقي أن نبين أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

لدينا $g(1) = e - 1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2$

ومنه $g(1) > 0$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

ج- تغيرات الدالة f

* لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x = 1$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

- لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

* ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

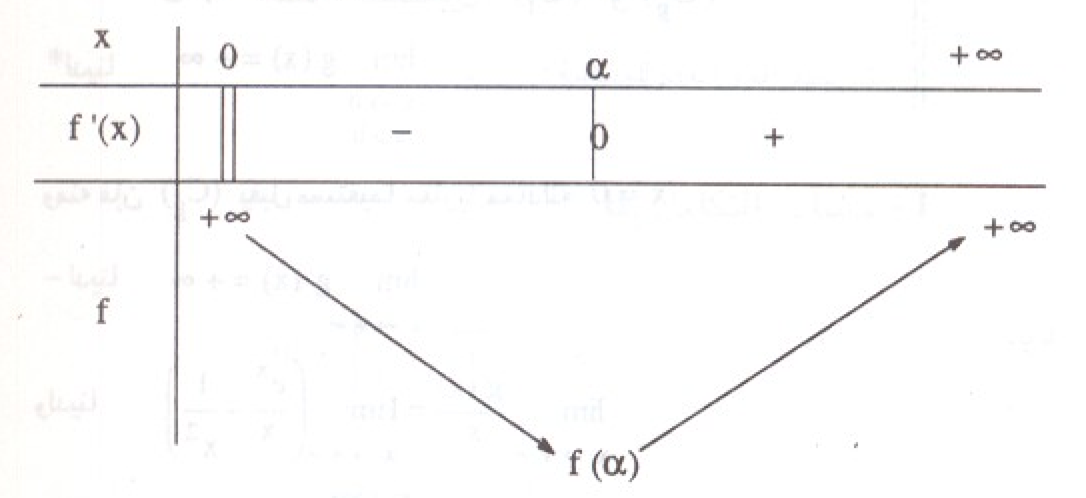
$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = g(x)$$

ولدينا g تزايدية قطعا على IR_+^* و $g(\alpha) = 0$ ومنه

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha] & g(x) \le g(\alpha) \\ \forall x \in [\alpha, +\infty[& g(\alpha) \le g(x) \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha] & f'(x) \le 0 \\ \forall x \in [\alpha, +\infty[& f'(x) \ge 0 \end{cases}$$



2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}} - \alpha$

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}} - \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

ومنه

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \alpha = \ln\alpha + \alpha$$

وبما أن $g(\alpha) = 0$ أي $e^\alpha - \frac{1}{\alpha} = 0$ فإن $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

ومنه $\ln e^\alpha = \ln\frac{1}{\alpha}$ أي $\alpha = -\ln\alpha$

إذن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ أي $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

ب- حل المتراجحة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f(x) - g(x) = (e^x - \ln x) - \left(e^x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \ln x$$

ومنه

$$f'(x) - g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

إذن $\forall x \in IR_+^* \quad (f' - g')(x) < 0$

ومنه الدالة $f - g$ تناقصية قطعا على IR_+^*

إذن $\forall x \in \left]0, \frac{1}{\alpha}\right[\quad (f-g)(x) > (f-g)\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

أي $\forall x \in \left]0, \frac{1}{\alpha}\right[\quad (f-g)(x) > 0$

ولدينا $\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}, +\infty\right[\quad (f-g)(x) < 0$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي

$$S = \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right[$$

3-أ- انشاء المنحنيين (C_f) و (C_g)

*لدينا $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$

ومنه فإن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 0$

- لدينا $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

ومنه فإن (C_g) يقبل اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأراتيب

* - لدينا $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

ومنه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 0$

- لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

ومنه فإن (C_f) يقبل اتجاها مقاربا اتجاهه محور الأراتيب

-لدينا $f(\alpha) = e^{\alpha} - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} + \alpha$ لأن $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

ب- حساب المساحة S

لدينا $S = \int_1^2 |f(t) - g(t)| \, dt$

$$= \int_1^2 \left|\frac{1}{t} - \ln t\right| dt$$

لدينا حسب السؤال الثاني الجزء ب منه :

$$\forall t \in \left[1, \frac{1}{\alpha}\right] \quad f(t) - g(t) \geq 0$$

$$\forall t \in \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right[\quad f(t) - g(t) \leq 0$$

ومنه

$$S = \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{t} - \ln t\right) dt + \int_{\frac{1}{\alpha}}^2 -\left(\frac{1}{t} - \ln t\right) dt$$

$$= \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{t} dt - \int_{\frac{1}{\alpha}}^2 \frac{1}{t} dt - \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \ln t \, dt + \int_{\frac{1}{\alpha}}^2 \ln t \, dt$$

$$= [\ln t]_1^{\frac{1}{\alpha}} - [\ln t]_{\frac{1}{\alpha}}^2 - \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \ln t \, dt + \int_{\frac{1}{\alpha}}^2 \ln t \, dt$$

لدينا

$$\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \ln t \, dt = [t.\ln t]_1^{\frac{1}{\alpha}} - \int_1^{\frac{1}{\alpha}} t . \frac{1}{t} dt$$

$$= [t \ln t - t]_1^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1$$

ولدينا

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^2 \ln t \, dt = [t \ln t - t]_{\frac{1}{\alpha}}^2$$

$$= 2 \ln 2 - 2 - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

إذن

$$S = \ln \frac{1}{\alpha} - \ln 2 - \left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(2 \ln 2 - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - 2\right)$$

$$= \frac{2 \ln \alpha}{\alpha} - \ln \alpha + \frac{2}{\alpha} + \ln 2 - 3$$

* * * *

40

في الفضاء المنسوب للمعلم المتعامد المنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر الفلكة (S) التي مركزها O وشعاعها R . ليكن (P) و (Q) المستويين المعرفين على التوالي بالمعادلتين $z = a$ و $z = -a$ حيث $0 < a \leq R$

أحسب v حجم الجسم المحصور بين الفلكة (S) والمستويين (P) و (Q)

حساب الحجم v

ليكن t عنصرا من $[-a, a]$. نعتبر (T) المستوى الذي معادلته $z = t$ المستوى (T) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها $\sqrt{R^2 - t^2}$ ومركزها $A(0, 0, t)$.

مساحة القرص الذي مركزه A وشعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$ هو

$$S(t) = \pi (R^2 - t^2)$$

إذن

$$v = \int_{-a}^{a} S(t)\, dt$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} (R^2 - t^2)\, dt$$

$$= \pi \left[R^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi \left(R^2 a - \frac{a^3}{3} + R^2 a - \frac{a^3}{3} \right)$$

$$= 2\pi \left(R^2 a - \frac{a^3}{3} \right)$$

ومنه

$$v = \frac{2\pi}{3} a (3R^2 - a^2)$$

* * * *

41

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN^* \qquad u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$$

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب u_1

2- بين أن $\forall n \in IN^* \quad u_n = \frac{2n}{2n+3} u_{n-1}$

3- حدد الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n>0}$

1- حساب التكامل u_1

لدينا

$$u_1 = \int_0^1 x \sqrt{1-x}\, dx$$

$$= \int_0^1 x (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x \,(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$$

إذن

$$u_1 = \frac{4}{15}$$

2- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN^* . لدينا

$$u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$$

$$= \int_0^1 x^n (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^n (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{3} n \; x^{n-1} (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{(1-x)^3}\, dx$$

$$= \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x) \sqrt{1-x}\, dx$$

$$= \frac{2n}{3} \int_0^1 \left(x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n \sqrt{1-x}\right) dx$$

$$= \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\, dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$$

إذن $u_n = \frac{2n}{3} u_{n-1} - \frac{2n}{3} u_n$

ومنه $(3+2n)\, u_n = 2n\, u_{n-1}$

أي $u_n = \frac{2n}{2n+3} u_{n-1}$

إذن $u_n = \frac{2n}{2n+3} u_{n-1} \qquad \forall n \in IN^*$

3- الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n>0}$

ليكن n عنصرا من *IN . لدينا

$$u_n = \frac{2n}{2n+3} u_{n-1}$$

$$u_{n-1} = \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} u_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$u_2 = \frac{2.2}{2.2+3} u_1$$

وبضرب هذه المتساويات طرفا بطرف وبعد الاختزال (علما أن حدودها غير منعدمة لأن $u_1 \neq 0$) نجد أن

$$u_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)+3} \cdots\cdots \frac{2.2}{2.2+3} u_1$$

$$= \frac{2^{n-1}.\, n.\, (n-1) \ldots\ldots 2}{(2n+3)(2n+1)\ldots\ldots 7} \cdot \frac{4}{15}$$

$$= \frac{2^{n+1}.\, n!}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n+3)}$$

إذن $u_n = \frac{2^{n+1}.\, n!}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n+3)} \qquad (\forall n \in IN^*)$

* * * *

42

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي

$$f(0) = 0 \quad و \quad f(x) = -x \ln x \quad (\forall x \in IR_+^*)$$

ليكن k عنصرا من *IN . نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة بمايلي

$$I_n = \int_0^1 x^k (\ln x)^n\, dx \quad (\forall n \in IN^*)$$

$$I_o = \int_0^1 x^k\, dx$$

1- أحسب I_0

2- أ- بين أن $I_n = \frac{-n}{k+1} I_{n-1} \quad \forall n \in \{1, \ldots, k\}$

ب- استنتج أن $I_n = \frac{(-1)^n\, n!}{(k+1)^{n+1}} \quad \forall n \in \{1, \ldots, k\}$

3- ليكن n عنصرا من *IN

احسب $\int_0^1 \frac{(f(x))^n}{n!} dx$

1- حساب التكامل I_o

لدينا $I_o = \int_0^1 x^k\, dx$

$$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k+1}$$

إذن $I_o = \frac{1}{k+1}$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من *IN بحيث $n < k+1$

لدينا $I_n = \int_0^1 x^k (\ln x)^n\, dx$

$$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} (\ln x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1}\, n (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} (\ln x)^n\right]_0^1 - \frac{n}{k+1}\int_0^1 x^k (\ln x)^{n-1}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{k+1-n}}{k+1} (x \ln x)^n\right]_0^1 - \frac{n}{k+1} I_{n-1}$$

$$= \left[\frac{x^{k+1-n}}{k+1} (-f(x))^n\right]_0^1 - \frac{n}{k+1} I_{n-1}$$

وبما أن $f(0) = 0$ و $f(1) = 0$ فإن

$$I_n = -\frac{n}{k+1} I_{n-1}$$

إذن $I_n = \frac{-n}{k+1} I_{n-1} \quad \forall n \in \{1, \ldots, k\}$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من $\{1, \ldots, k\}$

لدينا

$$I_n = \frac{-n}{k+1} I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{-(n-1)}{k+1} I_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$I_1 = \frac{-1}{k+1} I_o$$

وبضرب هذه المتساويات (وعددها n) طرف طرف (وبعد الاختزال علما أن حدودها غير منعدمة (لأن $(I_0 \neq 0$)) نجد أن

$$I_n = \frac{(-1)^n .\ 1.\ 2 \ldots n}{(k+1)^n}\ I_0$$

$$= \frac{(-1)^n\, n\,!}{(k+1)^n} \cdot \frac{1}{k+1}$$

إذن $\forall n \in \{1, \ldots, k\} \quad I_n = \dfrac{(-1)^n\, n\,!}{(k+1)^{n+1}}$

3- حساب التكامل المقترح

لدينا

$$\int_0^1 \frac{(f(x))^n}{n\,!}\, dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n\,!} .\ x^n (\ln x)^n\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{n\,!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n\, dx$$

إذا أخذنا k = n نجد أن

$$\int_0^1 \frac{(f(x))^n}{n\,!}\, dx = \frac{(-1)^n}{n\,!}\, I_n$$

إذن

$$\int_0^1 \frac{(f(x))^n}{n\,!}\, dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

* * * *

43

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$(\forall n \in IN^*)\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx$$

1- أ- بين أن $\quad 1 \leq 1 + x^n \leq 2 \quad (\forall x \in [0, 1]) \quad (\forall n \in IN^*)$

ب- استنتج أن $\quad \dfrac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n \in IN^*$

2- حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من [0, 1] و n عنصرا من *IN

لدينا $0 \leq x^n \leq 1$ ومنه $1 \leq 1 + x^n \leq 2$

إذن $\forall x \in [0, 1] \quad 1 \leq 1 + x^n \leq 2$

ب- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من *IN و x عنصرا من [0, 1]

لدينا $1 \leq 1 + x^n \leq 2$ أي $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$

إذن $\dfrac{1}{2} x^n \leq \dfrac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$

ومنه

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^n\, dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$$

أي

$$\left[\frac{1}{2} . \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

بمعنى أن $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

إذن $\forall n \in IN^* \quad \dfrac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

2- نهاية المتتالية المقترحة

لدينا $\forall n \in IN^* \quad \dfrac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

وبما أن $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$ و $\lim \dfrac{1}{2(n+1)} = 0$

فإن $\lim u_n = 0$

* * * *

44

نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة بما يلي

$$I_o = \int_1^e x\, dx$$

$$\forall n \in IN^* \quad I_n = \int_1^e x (\ln x)^n\, dx$$

1- أ- أحسب I_o و I_1

ب- بين أن $\quad 2 I_n + n I_{n-1} = e^2 \quad \forall n \in IN^*$

ج- احسب I_2 و I_3

2- أ- بين أن المتتالية (I_n) تنا قصية

ب- استنتج أن $\quad \dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2} \quad \forall n \in IN$

ج- حدد النهايتين $\lim I_n$ و $\lim n I_n$

1-أ- حساب القيميتين I_o و I_1

* لدينا

$$I_o = \int_1^e x\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

إذن $I_o = \dfrac{1}{2}(e^2 - 1)$

* لدينا

$$I_1=\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

إذن $I_1=\frac{1}{4}(e^2+1)$

ب- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن n عنصرا من IN^* . لدينا

$$I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$$

ومنه $2I_n+nI_{n-1}=e^2$

إذن $\forall n\in IN^*\quad 2I_n+nI_{n-1}=e^2$

ج- حساب القيمتين I_2 و I_3

* حسب السؤال السابق لدينا

$2I_2+2I_1=e^2$ أي $I_2=\frac{e^2}{2}-I_1$

وبما أن $I_1=\frac{1}{4}(e^2+1)$ فإن $I_2=\frac{1}{4}(e^2-1)$

* حسب السؤال السابق لدينا

$2I_3+3I_2=e^2$ أي $I_3=\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}I_2$

إذن

$$I_3=\frac{e^2}{2}-\frac{3}{8}(e^2-1)$$

$$=\frac{1}{8}(e^2+3)$$

2-أ- رتابة المتتالية (I_n)

* ليكن n عنصرا من IN^*

لدينا $\forall x\in[1,e]\quad 0\le\ln x\le 1$

ومنه $\forall x\in[1,e]\quad (\ln x)^{n+1}\le(\ln x)^n$

إذن $\forall x\in[1,e]\quad x(\ln x)^{n+1}\le x(\ln x)^n$

ومنه $\int_1^e x(\ln x)^{n+1}\,dx\le\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

أي $I_{n+1}\le I_n$

* لدينا

$$I_1\le I_o\Leftrightarrow\frac{1}{4}(e^2+1)\le\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\Leftrightarrow e^2+1\le 2e^2-2$$

$$\Leftrightarrow 3\le e^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\le e$$

وبما أن $2<e$ فإن العبارة $\sqrt{3}\le e$ صحيحة ومنه $I_1\le I_0$

إذن $\forall n\in IN\quad I_{n+1}\le I_n$

وهذا يعني أن المتتالية (I_n) تناقصية

ب- الاستنتاج

* ليكن n عنصرا من IN^*

المتتالية (I_n) تناقصية ومنه $I_{n+1}\le I_n\le I_{n-1}$

حسب السؤال الاول الجزء ب منه لدينا

$2I_n+nI_{n-1}=e^2$ أي $I_{n-1}=\frac{e^2-2I_n}{n}$

ولدينا $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ أي $I_{n+1}=\frac{1}{2}(e^2-(n+1)I_n)$

إذن $\frac{1}{2}(e^2-(n+1)I_n)\le I_n\le\frac{1}{n}(e^2-2I_n)$

ومنه

$$\begin{cases}nI_n\le e^2-2I_n\\ e^2-(n+1)I_n\le 2I_n\end{cases}$$

أي

$$\begin{cases}(n+2)I_n\le e^2\\ e^2\le(n+3)I_n\end{cases}$$

إذن

$$\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$$

لدينا

$$\frac{e^2}{3}\le I_o\le\frac{e^2}{2}\Leftrightarrow\frac{e^2}{3}\le\frac{1}{2}(e^2-1)\le\frac{e^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le 0\\ \frac{2e^2}{3}\le e^2-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le 0\\ 3\le e^2\end{cases}$$

ومنه $\frac{e^2}{3}\le I_o\le\frac{e^2}{2}$ إذن $(\forall n\in IN)\ \frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$

ج- تحديد النهايتين

* لدينا $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \quad \forall n \in IN$

ولدينا $\lim \frac{e^2}{n+2} = \lim \frac{e^2}{n+3} = 0$

إذن $\lim I_n = 0$

* لدينا $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \quad \forall n \in IN$

ومنه $\forall n \in IN \quad \frac{n}{n+3} e^2 \leq n I_n \leq \frac{n}{n+2} e^2$

ولدينا $\lim \frac{n}{n+3} e^2 = \lim \frac{n}{n+2} e^2 = e^2$

إذن $\lim n I_n = e^2$

* * * *

45

لتكن f دالة متصلة وتزايدية على $[a, b]$ $(a < b)$ نعتبر العددية $(S_n)_{n>0}$ المعرفة بمايلي

$$\forall n \in IN^* \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

1- ليكن n عنصرا من *IN

أ- ليكن k عنصرا من $\{0, \ldots n-1\}$

نضع $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ و $x_{k+1} = a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}$

بين أن $\frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leq \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$

ب- استنتج أن

$$S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S_n + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

2- استنتج أن $\lim S_n = \int_a^b f(t)\,dt$

3- تطبيق : احسب النهاية $\lim \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{n}$

1-أ- اثبات المتفاوتة المزدوجة

لدينا $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ ومنه $x_{k+1} - x_k > 0$

وبما أن الدالة f تزايدية فإن

ومنه $\forall t \in [x_k, x_{k+1}] \quad f(x_k) \leq f(t) \leq f(x_{k+1})$

ومنه $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})\,dt$

أي $f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leq f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$

إذن $\frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leq \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$

ب- الاستنتاج الأول

نضع لكل k من $\{0, \ldots. n\}$ $\quad x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$

لدينا $x_o < x_1 < \ldots. < x_n$ و $x_o = a$ و $x_n = b$

إذن $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$

وحسب السؤال السابق يكون لدينا

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \quad \int_a^b f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$$

لدينا $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i) + \frac{b-a}{n} f(x_n) - \frac{b-a}{n} f(a)$$

$$= S_n + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

إذن $S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S_n + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$

2- الاستنتاج الثاني

لدينا مهما تكن n من *IN فإن

$$S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt - S_n \leq \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) + S_n$$

أي مهما تكن n من *IN فإن

$$0 \leq \int_a^b f(t)\,dt - S_n \leq \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

ولدينا $\lim \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = 0$ ومنه

$$\lim S_n = \int_a^b f(t)\,dt$$

3- تطبيق

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) = 2^x$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$

ولدينا $\quad f'(x) = \ln 2.\ e^{x \ln 2} \qquad \forall x \in [0, 1]$

ومنه $\quad \forall x \in [0, 1] \quad f'(x) \geq 0$

إذن f متصلة وتزايدية على $[0, 1]$

ليكن n عنصرا من IN*

لدينا
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-0}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

أي
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} 2^{\frac{k}{n}}$$

أي
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt[n]{2^k}}{n}$$

إذن
$$S_n = \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{n}$$

وحسب السؤال الثاني يكون لدينا

$$\lim S_n = \int_0^1 2^x\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{x \ln 2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

وبالتالي فإن
$$\lim \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{n} = \frac{1}{\ln 2}$$

* * * *

46

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n \in IN^* \quad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$$

1- أ- ليكن n عنصرا من IN*

بين أن $\quad u_n = \frac{n+2}{n+1} u_{n+2}$

ب- استنتج أن $\quad u_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \qquad \forall n \in IN^*$

ج- حدد u_{2n+1} بدلالة n و π

2- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية

3- بين أن $\quad 2 u_{2n} \leq \pi \leq 2 (2n+1) u_{2n+1} \qquad \forall n \in IN^*$

4- ليكن n عنصرا من IN*

أ- بين أن
$$\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = 2(2n+1) \left(\frac{1}{4^n} C_{2n}^n\right)^2$$

ب- بين أن
$$\left(\frac{1}{4^n} C_{2n}^n\right)^2 \cdot \frac{16(n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}$$

ج- استنتج نهاية المتتالية (v_n) المعرفة بمايلي :

$$\forall n \in IN \quad v_n = \frac{1}{4^n} \sqrt{n}.\ C_{2n}^n$$

1-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا
$$u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\ \sin^n t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \sin^n t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\, dt$$

$$= u_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\, dt$$

لدينا
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ .\ (\cos t \sin^n t)\, dt$$

$$= \left[\cos t\ .\ \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ .\ \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n+1} \sin^{n+2} t\, dt$$

$$= \frac{1}{n+1} u_{n+2}$$

إذن
$$u_{n+2} = u_n - \frac{1}{n+1} u_{n+2}$$

ومنه $u_n = \frac{n+2}{n+1} u_{n+2}$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall n \in IN^* \quad u_n = \frac{n+2}{n+1} u_{n+2}$

ومنه $\forall n \in IN^* \quad u_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1} u_{2n+2}$

نضع $\forall n \in IN^* \quad v_n = u_{2n}$ ومنه

$$\forall n \in IN^* \quad v_n = \frac{2n+2}{2n+1} v_{n+1}$$

إذن $\forall n \in IN^* \quad v_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} v_n$

ليكن n عنصرا من IN* . لدينا

$$v_n = \frac{2n-1}{2n} v_{n-1}$$
$$v_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)} v_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$v_2 = \frac{3}{4} v_1$$

ويضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد أن

$$v_n = \frac{3 x \ldots x (2n-3)(2n-1)}{4 x \ldots x 2(n-1) . 2n} v_1$$

لدينا $v_1 = u_2$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

إذن $v_n = \frac{3 x 5 x \ldots x (2n-1)}{4 x \ldots x 2n} \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 x \ldots (2n-1)}{2 x \ldots x 2n}$$

وبالتالي فإن $\forall n \in IN^* \quad u_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 x \ldots x (2n-1)}{2 x \ldots x 2n}$

ج- تحديد الحد u_{2n+1}

لدينا $\forall n \in IN^* \quad u_n = \frac{n+2}{n+1} u_{n+2}$

ومنه $\forall n \in IN^* \quad u_{2n+1} = \frac{2n+3}{2n+2} u_{2n+3}$

نضع لكل n من IN* : $v_n = u_{2n+1}$

ولدينا $\forall n \in IN^* \quad v_n = \frac{2n+3}{2n+2} v_{n+1}$

أي $\forall n \in IN^* \quad v_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} v_n$

ليكن n عنصرا من IN* . لدينا

$$v_n = \frac{2n}{2n+1} v_{n-1}$$
$$v_{n-1} = \frac{2(n-1)}{2n-1} v_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$v_2 = \frac{4}{5} v_1$$

ويضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد أن

$$v_n = \frac{4 x \ldots x 2n}{5 x \ldots x (2n+1)} v_1$$

ولدينا $v_1 = u_3$

$$= \frac{1+1}{1+2} u_1$$

وذلك حسب السؤال الأول الجزء أ منه

ومنه $v_1 = \frac{2}{3} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$

إذن $v_n = \frac{4 x \ldots x 2n}{5 x \ldots x (2n+1)} \cdot \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4 x \ldots x 2n}{3 x 5 x \ldots x (2n+1)}$$

ومنه $u_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4 x \ldots x 2n}{3 x 5 x \ldots (2n+1)}$

2-أ- رتابة المتتالية $(u_n)_{n>0}$

ليكن n عنصرا من IN*

لدينا $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \le \sin t \le 1$

ومنه $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin^{n+1} t \le \sin^n t$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

أي $u_{n+1} \le u_n$

وهذا يعني أن $(u_n)_{n>0}$ تناقصية

3- تأطير العدد π

ليكن n عنصرا من IN*

لدينا $$u_{2n} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$$

ومنه $$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}\, u_{2n}$$

لدينا $1 \le 2$ و $3 \le 4$ و .... و $2n-1 < 2n$

ومنه $$1 \times 3 \times \dots (2n-1) \le 2 \times 4 \times \dots \times 2n$$

ومنه $$1 \le \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}$$

أي $$u_{2n} \le \frac{\pi}{2}$$

ولدينا $$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$$

ومنه $$\frac{\pi}{2} = \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{4 \times \dots \times 2n}\, u_{2n+1}$$
$$= \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{4 \times \dots \times 2n}\, (2n+1)\, u_{2n+1}$$

وبما أن $\frac{3 \times \dots \times (2n-1)}{4 \times \dots \times 2n} \le 1$ فإن
$$\frac{\pi}{2} \le (2n+1)\, u_{2n+1}$$

إذن $$u_{2n} \le \frac{\pi}{2} \le (2n+1)\, u_{2n+1}$$

أي $$2u_{2n} \le \pi \le 2(2n+1)\, u_{2n+1}$$

وبالتالي فإن $$\forall n \in IN^* \quad 2u_{2n} \le \pi \le 2(2n+1)\, u_{2n+1}$$

4-أ- اثبات المتساوية الأولى

لدينا $$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$$
$$u_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times \dots \times 2n}$$

ومنه $$\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = \left(\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{4 \times 6 \times \dots \times 2n}\right)^2 \cdot \frac{2n+1}{2}$$
$$= 2(2n+1)\left(\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}\right)^2$$

ولدينا $$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

ومنه $$\frac{1}{4^n} C_{2n}^{n} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 2n}{(2^n n!) \cdot (2^n n!)}$$
$$= \frac{1 \times 2 \times \dots \times 2n}{(2 \times 4 \times \dots 2n)(2 \times 4 \times \dots \times 2n)}$$
$$= \frac{3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$$

إذن $$\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = 2(2n+1)\left(\frac{1}{4^n} C_{2n}^{n}\right)^2$$

ب- اثبات المتساوية الثانية

لدينا $$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$$
$$u_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times \dots \times (2n+2)}$$

ومنه $$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} = \frac{4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} \cdot \frac{2 \times \dots \times (2n+2)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}$$

أي $$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} = \frac{(4 \times 6 \times \dots \times 2n)^2}{(3 \times 5 \times \dots \times (2n+1))^2} \cdot (2n+2) \times 2$$
$$= \left(\frac{4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{4(n+1)}{(2n+1)^2}$$

إذن $$\left(\frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{4 \times 6 \times \dots \times 2n}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)} \cdot \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}$$

أي $$4\left(\frac{1}{4^n} C_{2n}^{n}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)} \cdot \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}}$$

ومنه $$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} = \frac{16(n+1)}{(2n+1)^2}\left(\frac{1}{4^n} C_{2n}^{n}\right)^2$$

ج- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN^* . لدينا

$$v_n = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{4^n} C_{2n}^{n}$$

وحسب السؤال الرابع الجزء ب منه لدينا

$$v_n = \sqrt{n}\ \sqrt{\frac{(2n+1)\, u_{2n+1}}{16(n+1)\, u_{2n+2}}}$$

حسب السؤال الثالث لدينا

$$\forall n \in IN \quad u_{2n} \le (2n+1)\, u_{2n+1}$$

ومنه $$u_{2n+2} \le (2n+3)\, u_{2n+3}$$

وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فإن $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ ومنه

$$u_{2n+2} \le (2n+3)\, u_{2n+1}$$

أي $$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} \ge \frac{1}{2n+3}$$

ومنه $$v_n \ge \sqrt{n}\ \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{16(n+1)}\ \frac{1}{2n+3}}$$

أي $$v_n \ge \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n(2n+1)^2}{(n+1)(2n+3)}}$$

لدينا $$\lim \frac{n(2n+1)^2}{(n+1)(2n+3)} = \lim \frac{4n^3 + 4n^2 + n}{2n^2 + 5n + 3}$$
$$= \lim \frac{2n^3}{2n^2}$$
$$= +\infty$$

إذن $$\lim v_n = +\infty$$

47

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad f(x) = \int_x^{2x} \ln(e^t - t)\, dt$$
$$f(0) = 0$$

1- بين أن f متصلة وقابلة للاشتقاق على IR_+^*

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad g(x) = \ln(e^x - 1)$$

أ- ادرس رتابة الدالة g

ب- استنتج أنه مهما يكن x من IR_+^* فإن

$$x\, g(x) \le f(x) \le x\, g(2x)$$

ج- بين أن f متصلة على اليمين في 0

د- ادرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0

هـ- احسب النهايتين $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

3- نعتبر الدالة العددية u المعرفة بمايلي

$$\forall x \in IR_+ \qquad u(x) = e^{3x} + e^{2x} - e^x - 2$$

أ- ادرس تغيرات الدالة u

ب- بين أن $\qquad \forall x \in IR_+^* \qquad f'(x) = \ln(u(x) + 1)$

ج- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث

$$\begin{cases} \ln\frac{6}{5} < \alpha < \ln\frac{5}{4} \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

4- أ- ادرس رتابة الدالة f .

ب- بين أن $f(\alpha) < 0$

ج- استنتج أن $\qquad f(\beta) = 0 \qquad \exists ! \beta \in [\alpha, \ln 2]$

د- ادرس اشارة f(x) حسب قيم العدد x

5- انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(نأخذ $\ln 2 \approx 0{,}7$ و $\alpha = 0{,}2$ و $f(\alpha) = -0{,}3$)

1- اتصال وقابلية اشتقاق f

لدينا $\qquad \forall x \in IR_+^* \qquad f(x) = \int_x^{2x} g(t)\, dt$

حيث g هي الدالة المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \qquad g(x) = \ln(e^x - 1)$$

لدينا g متصلة على IR_+^* لأنها مركب دالتين متصلتين على IR_+^* و أن

$$\forall x \in IR_+^* \qquad e^x - 1 > 0$$

إذن f متصلة وقابلة للاشتقاق على IR_+^*

2-أ- رتابة الدالة g

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$g'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

ومنه $\qquad \forall x \in IR_+^* \quad g'(x) > 0$

إذن الدالة g تزايدية قطعا على IR_+^*

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_+^*

لدينا g تزايدية قطعا على IR_+^* و $2x > x$

ومنه $\qquad \forall t \in [x, 2x] \qquad g(x) \le g(t) \le g(2x)$

إذن $\qquad \int_x^{2x} g(x)\, dt \le \int_x^{2x} g(t)\, dt \le \int_x^{2x} g(2x)\, dt$

أي $\qquad (2x - x)\, g(x) \le f(x) \le (2x - x)\, g(2x)$

أي $\qquad x\, g(x) \le f(x) \le x\, g(2x)$

إذن $\qquad \forall x \in IR_+^* \qquad x\, g(x) \le f(x) \le x\, g(2x)$

ج- اتصال f على اليمين في 0

لدينا $\qquad \forall x \in IR_+^* \qquad x\, g(x) \le f(x) \le x\, g(2x)$

ولدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\, g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(e^x - 1) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{e^x - 1} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) = 0$$

لأن

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (e^x - 1) \ln(e^x - 1) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} X \ln X = 0$$

إذن $\qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\, g(x) = 0$

ولدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\, g(2x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2} (2x)\, g(2x) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{1}{2} X\, g(X) = 0$$

إذن $\qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

وبما أن $f(0) = 0$ فإن f متصلة على اليمين في 0

د- قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

لدينا $\qquad \forall x \in IR_+^* \qquad x\, g(x) \le f(x) \le x\, g(2x)$

ومنه $\qquad \forall x \in IR_+^* \qquad \frac{f(x)}{x} \le g(2x)$

لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(2x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(e^{2x}-1)$$
$$= \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \ln X$$
$$= -\infty$$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ أي $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

هـ- حساب النهايتين

* لدينا $\forall x \in IR_+^* \quad x\,g(x) \le f(x) \le x\,g(2x)$

ولدينا
$$\lim_{x\to+\infty} x\,g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln(e^x-1)$$
$$= +\infty$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* لدينا $\forall x \in IR_+^* \quad g(x) \le \frac{f(x)}{x}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

3-أ- تغيرات الدالة u

* - لدينا
$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{3x}+e^{2x}-e^x-2)$$
$$= \lim_{X\to+\infty} (X^3+X^2-X-2)$$
$$= \lim_{X\to+\infty} X^3$$
$$= +\infty$$

- لدينا $u(0) = -1$

* ليكن x عنصرا من IR+ . لدينا
$$u'(x) = 3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x$$
$$= e^x(3e^{2x}+2e^x-1)$$

بما أن $x \ge 0$ فإن $e^x \ge 1$ ومنه $3e^{2x}+2e^x-1 > 0$

إذن $u'(x) > 0 \quad \forall x \in IR+$

x	0	+∞
u'(x)	+	
u	-1 ↗	+∞

ب- الدالة المشتقة للدالة f

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا

$$f(x) = \int_x^1 \ln(e^t-1)\,dt + \int_1^{2x} \ln(e^t-1)\,dt$$

نعتبر الدالة h المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR_+^* \quad h(x) = \int_1^x \ln(e^t-1)\,dt$$

ولدينا $f(x) = -h(x) + h(2x)$

ومنه
$$f'(x) = -h'(x) + 2h'(2x)$$
$$= -\ln(e^x-1) + 2\ln(e^{2x}-1)$$
$$= \ln\left(\frac{(e^{2x}-1)^2}{e^x-1}\right)$$
$$= \ln\left[\frac{(e^x-1)^2(e^x+1)^2}{e^x-1}\right]$$
$$= \ln((e^x-1)(e^x+1)^2)$$
$$= \ln((e^x-1)(e^{2x}+2e^x+1))$$
$$= \ln(e^{3x}+e^{2x}-e^x-1)$$
$$= \ln(u(x)+1)$$

إذن $\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) = \ln(u(x)+1)$

ج- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا

$$f'(x) = 0 \iff \ln(u(x)) + 1) = 0$$
$$\iff u(x) + 1 = 1$$
$$\iff u(x) = 0$$

لدينا u متصلة على $]0, +\infty[$

ولدينا $u\left(\ln\frac{6}{5}\right) < 0$ و $u\left(\ln\frac{5}{4}\right) > 0$ (تحقق من ذلك)

وحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا

$$\exists \alpha \in \left]\ln\frac{6}{5}, \ln\frac{5}{4}\right[\quad u(\alpha) = 0$$

إذن يوجد عدد حقيقي α بحيث

$$\begin{cases} \ln\frac{6}{5} < \alpha < \ln\frac{5}{4} \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

4-أ- رتابة الدالة

لدينا u تزايدية قطعا على IR+ ومنه

$$\forall x \in [0, \alpha] \quad u(x) \le u(\alpha)$$
$$\forall x \in [\alpha, +\infty[\quad u(x) \ge u(\alpha)$$

ومنه

$$\forall x \in [0, \alpha] \quad u(x) + 1 \le 1$$
$$\forall x \in [\alpha, +\infty[\quad u(x) + 1 \ge 1$$

إذن $\forall x \in [0, \alpha] \quad f'(x) \le 0$

$\forall x \in [\alpha, +\infty[\quad f'(x) \ge 0$

x	0		α		+∞
f '(x)	‖	-	0	+	
f	0	↘	f (α)	↗	+∞

ب- اشارة العدد $f(\alpha)$

لدينا f تناقصية قطعا على $[0, \alpha]$ ومنه

$f(\alpha) < f(0)$ أي $f(\alpha) < 0$

ج- الاستنتاج

لدينا f متصلة على $[\alpha, \ln 2]$ وتزايدية قطعا على $[\alpha, \ln 2]$ لأن f تزايدية قطعا على $]\alpha, +\infty[$ وأن $[\alpha, \ln 2] \subset [\alpha + \infty[$

إذن f تقابل من $[\alpha, \ln 2]$ نحو المجال I حيث

$$I = [f(\alpha), f(\ln 2)]$$

حسب السؤال الثاني الجزء ب منه لدينا

$$\ln 2\, g(\ln 2) \le f(\ln 2)$$

وبما أن $g(\ln 2) = 0$ فإن $0 \le f(\ln 2)$

إذن $0 \in I$

ومنه $\exists ! \beta \in [\alpha, \ln 2] \quad f(\beta) = 0$

د- دراسة اشارة $f(x)$

حسب السؤال الثاني الجزء ب منه لدينا

$$\forall x \in IR_+^* \quad x\, g(x) \le f(x)$$

ليكن x عنصرا من IR_+^*

إذا كان $x \ge \ln 2$ فإن $g(x) \ge g(\ln 2)$ لأن الدالة g تزايدية قطعا على IR_+^*

ومنه $g(x) \ge 0$

إذن $\forall x \in [\ln 2, +\infty[\quad f(x) \ge 0$

إذا كان $0 < x < \alpha$ فإن $f(x) \le f(0)$ لأن الدالة f تناقصية قطعا على $[0, \alpha]$

إذن $\forall x \in [0, \alpha] \quad f(x) \le 0$

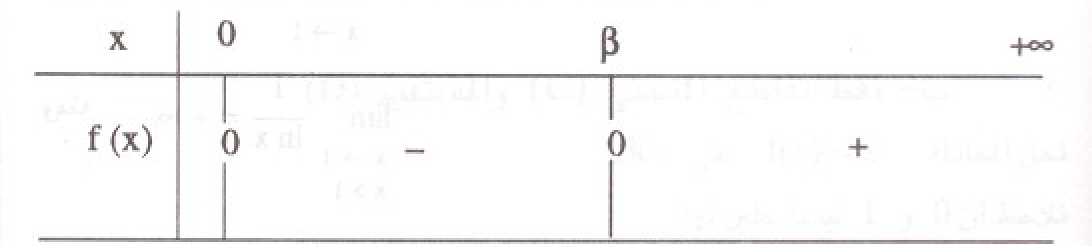
إذا كان $\alpha < x \le \beta$ فإن $f(x) \le f(\beta)$ أي $f(x) \le 0$

إذن $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) \le 0$

إذا كان $\beta \le x \le \ln 2$ فإن $f(x) \ge f(\beta)$ أي $f(x) \ge 0$

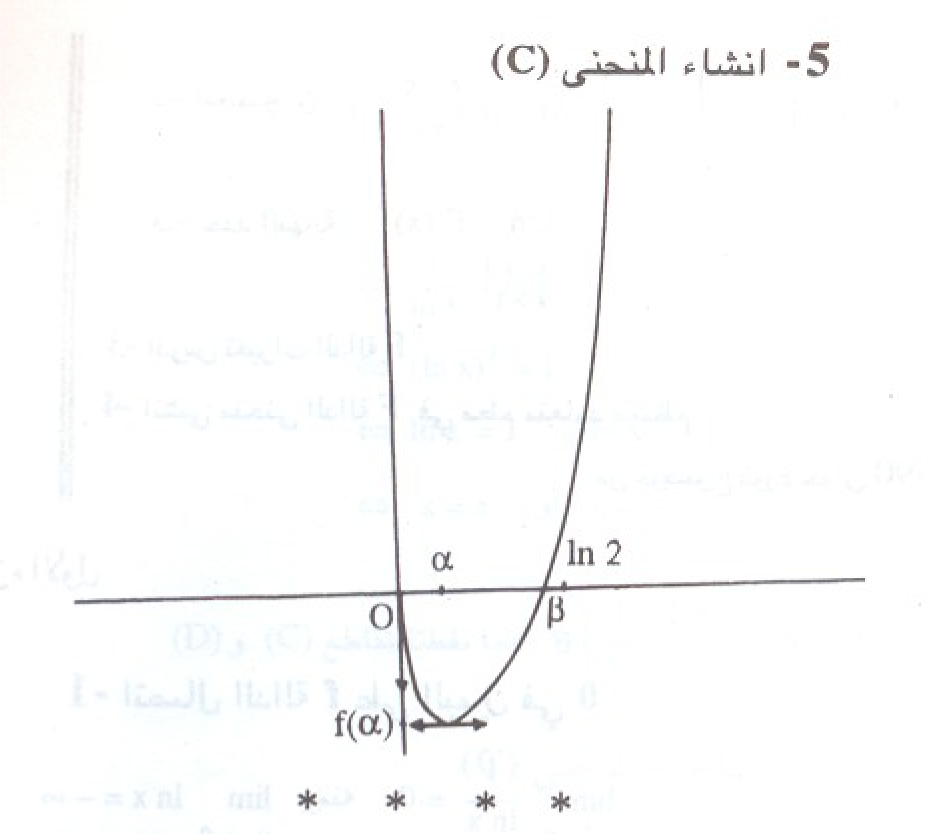
إذن $\forall x \in [\beta, \ln 2] \quad f(x) \ge 0$

نجمل النتائج السابقة في الجدول التالي



x	0		β		+∞
f (x)	0	−	0	+	

5- انشاء المنحنى (C)



* * *

48

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} \quad ; \quad x \in IR_+^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

الجزء الأول

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1- ادرس اتصال وقابلية اشتقاق f على اليمين في 0

2- أ- ادرس اتصال وقابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ب- هل الدالة متصلة في 1 ؟

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- أ- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ محور تماثل المنحنى (C)

ب- حدد نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (D)

ج- انشئ المنحنى (C)

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية F المعرفة بمايلي

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt$$

1- أ- بين أنه مهما يكن x من $]1, +\infty[$ فإن

$$f(x+1) \le F(x) \le f(x)$$

ب- استنتج النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

2- أ- بين أن $\forall u \in]0, +\infty[\quad e^u \ge u + 1$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من $]1, +\infty[$ فإن

$$F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\, dt$$

ج- بين أن $\forall t \in]0, +\infty[\quad \ln t \le t - 1$

د– استنتج أن $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\, dt \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ $\quad \forall x \in]1, +\infty[$

هـ– حدد النهاية $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x)$

3- ادرس تغيرات الدالة F

4- انشئ منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم

من موضوع دورة جوان 1990

الجزء الأول

1- اتصال الدالة f على اليمين في 0

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 = f(0)$

ومنه f متصلة على اليمين في 0

قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$ لدينا

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{\ln x}} - 1\right)$$

نضع $X = \frac{1}{\ln x}$ أي $\ln x = \frac{1}{X}$

ومنه $x = e^{\frac{1}{X}}$

إذن $\frac{f(x) - f(0)}{x} = e^{-\frac{1}{X}}\left(e^X - 1\right)$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} e^{-\frac{1}{X}}\left(e^X - 1\right)$$
$$= \lim_{\substack{X \to 1 \\ X < 0}} X e^{-\frac{1}{X}} \cdot \frac{e^X - 1}{X}$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

ولدينا
$$\lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} X e^{-\frac{1}{X}} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{e^t}{t} = -\infty$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

2-أ- اتصال الدالة f على اليسار في 1

لدينا $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$ ولدينا $\ln x < 0$ لكل $x < 1$

ومنه $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\ln x} = -\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0 = f(1)$

ومنه فإن x متصلة على اليسار في 1

قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

ليكن x عنصرا من $]0, 1[$. لدينا

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} e^{\frac{1}{\ln x}}$$

نضع $X = \frac{1}{\ln x}$ ومنه $x = e^{\frac{1}{X}}$

إذن $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{e^X}{e^{\frac{1}{X}} - 1}$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{X \to -\infty} \frac{e^X}{e^{\frac{1}{X}} - 1}$$
$$= \lim_{X \to -\infty} X e^X \cdot \frac{\frac{1}{X}}{e^{\frac{1}{X}} - 1}$$

لدينا
$$\lim_{X \to -\infty} \frac{\frac{1}{X}}{e^{\frac{1}{X}} - 1} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{t}{e^t - 1} = 1$$

ولدينا
$$\lim_{X \to -\infty} X e^X = \lim_{t \to +\infty} -t e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x} = 0$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

ب– الدالة f غير متصلة في 1

لدينا $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$ و $\ln x > 0$ لكل $x > 1$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

وهذا يعني أن f غير متصلة على اليمين في 1

إذن f غير متصلة في 1

3- تغيرات الدالة

* لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

* ليكن x عنصرا من $IR^* - \{1\}$

لدينا $f(x) = e^{u(x)}$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$u(x) = \frac{1}{\ln x}$$

ومنه

$$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = -\frac{1/x}{(\ln x)^2} e^{u(x)} = -\frac{1}{x(\ln x)^2} e^{u(x)}$$

إذن $f'(x) < 0 \qquad \forall x \in IR_+^* - \{1\}$

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	−	‖	−	
f	1 ↘		0 ‖ $+\infty$	↘	1

4- أ- محور تماثل المنحنى (C)

لتكن M(x, y) نقطة من المنحنى (C)

لدينا M '(y, x) هي مماثلة M بالنسبة للمستقيم (D)

- إذا كان $x = 0$ فإن $y = 1$ ولدينا $(1,0)$ هو زوج إحداثيتي M'

وبما أن $f(1) = 0$ فإن $M' \in (C)$

- نفترض أن $x \neq 0$ و $x \neq 1$

لدينا $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$ ومنه $\ln y = \frac{1}{\ln x}$

أي $\ln x = \frac{1}{\ln y}$ ومنه $x = e^{\frac{1}{\ln y}}$

أي $x = f(y)$ ومنه $M' \in (C)$

وبالتالي فإن (D) هو محور تماثل المنحنى (C)

ب- نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (D)

نحل المعادلة $f(x) = x$ في IR+

نلاحظ أن 0 و 1 ليسا حلين لها

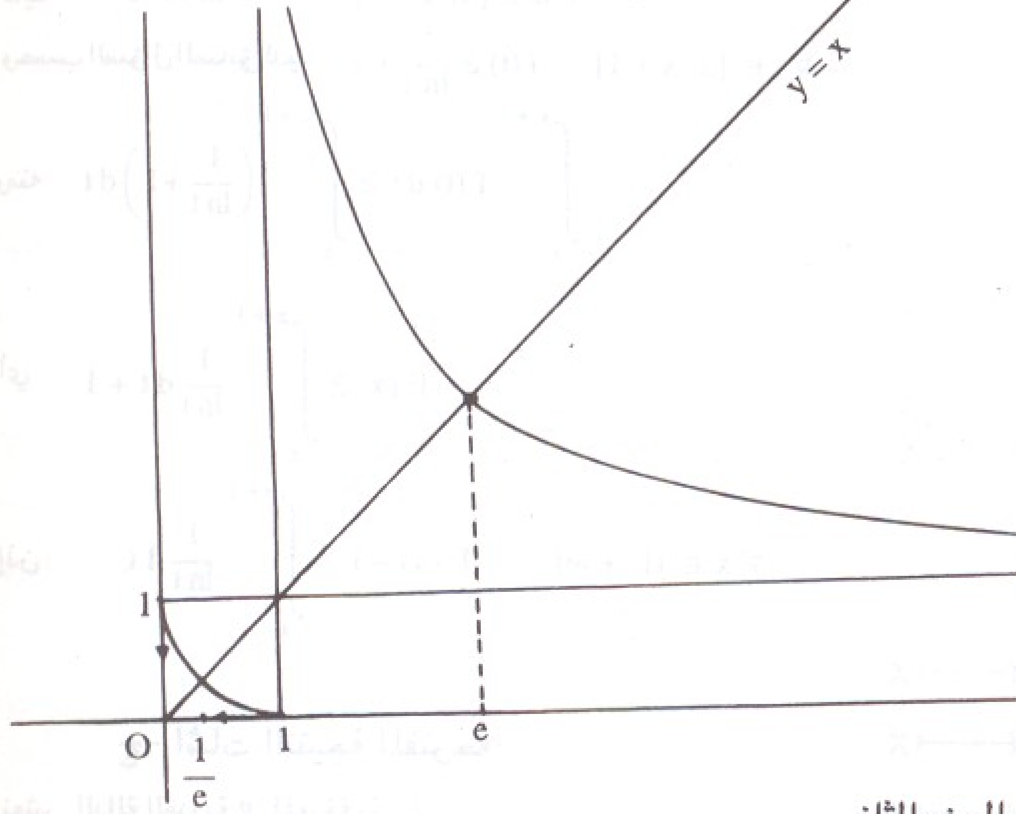
ليكن x عنصرا من $IR_+^* - \{1\}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\ln x}} = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} = \ln x$$
$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ أو } \ln x = -1$$
$$\Leftrightarrow x = e \text{ أو } x = \frac{1}{e}$$

إذن A(e, e) و $B\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ هما نقطتا تقاطع (C) و (D)



ج- انشا ء المنحنى (C)



الجزء الثاني

1- أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

لدينا f تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$ ومنه

$$\forall x \in [x, x+1] \qquad f(x+1) \leq f(t) \leq f(x)$$

ومنه

$$\int_x^{x+1} f(x+1)\, dt \leq \int_x^{x+1} f(t)\, dt \leq \int_x^{x+1} f(x)\, dt$$

أي $f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$

إذن $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$

ب- الاستنتاج

لدينا $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$

ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x+1) = \lim_{X \to +\infty} f(X) = 1$$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

2-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن u عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا $\forall t \in [0, u] \quad e^t \geq 1$

ومنه $$\int_0^u e^t \, dt \geq \int_0^u dt$$

أي $e^u - e^0 \geq u$

إذن $e^u \geq u + 1$

وبالتالي فإن $e^u \geq u + 1 \qquad \forall u \in]0, +\infty[$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

لدينا $\ln t > 0 \qquad \forall u \in [x, x+1]$

وحسب السؤال السابق لدينا $f(t) \geq \dfrac{1}{\ln t} + 1 \qquad \forall t \in [x, x+1]$

ومنه $$\int_x^{x+1} f(t) \, dt \geq \int_x^{x+1} \left(\frac{1}{\ln t} + 1\right) dt$$

أي $$F(x) \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} \, dt + 1$$

إذن $$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} \, dt \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

ج- اثبات النتيجة المقترحة

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$g(t) = \ln t - t + 1 \qquad \forall t \in]0, +\infty[$$

لدينا $g'(t) = \dfrac{1}{t} - 1 \qquad \forall x \in]0, +\infty[$

إذن $g'(t) > 0 \qquad \forall t \in]0, 1[$

$g'(t) < 0 \qquad \forall t \in]1, +\infty[$

ومنه $g(t) \leq 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[$ أي $\ln t \leq t - 1 \quad \forall t \in]0, +\infty[$

د- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$. لدينا

$$\ln t \leq t - 1 \qquad \forall t \in [x, x+1]$$

وذلك حسب السؤال السابق

ومنه $\dfrac{1}{\ln t} > \dfrac{1}{t-1} \qquad \forall t \in [x, x+1]$

إذن $$\int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} \, dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{t-1} \, dt$$

لدينا $$\int_x^{x+1} \frac{1}{t-1} \, dt = [\ln(t-1)]_x^{x+1}$$

$$= \ln x - \ln(x-1)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

ومنه $$\int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} \, dt \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

هـ- تحديد النهاية المطلوبة

لدينا $$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} \, dt \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

ولدينا $$\int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} \, dt \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

ومنه $F(x) - 1 \geq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \qquad \forall x \in]1, +\infty[$

إذن $F(x) \geq 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \qquad \forall x \in]1, +\infty[$

لدينا $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x) = +\infty$

3- تغيرات الدالة F

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$. لدينا

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t) \, dt$$

$$= G(x+1) - G(x)$$

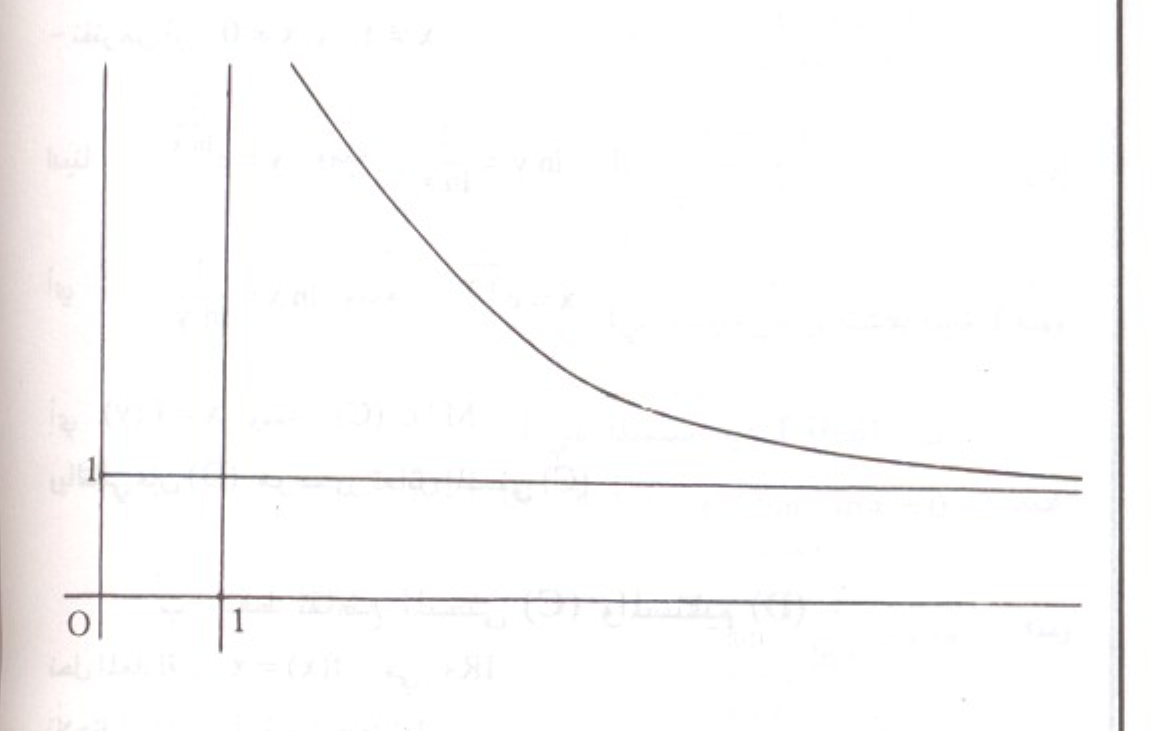
حيث G دالة أصلية للدالة f

ومنه $F'(x) = G'(x+1) - G'(x) = f(x+1) - f(x)$

بما أن f تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$ و $x < x+1$

فإن $f(x+1) < f(x)$ أي $F'(x) < 0$

4- انشاء المنحنى الدالة F



8 المعادلات التفاضلية

– معادلات من النوع :

$$y' + ay = 0$$
$$y' + ay = f(x)$$
$$y'' + ay' + by = 0$$
$$y'' + ay' + by = f(x)$$

حيث f دالة من النوع

$$x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + c$$
$$x \longmapsto \cos(\omega x + \alpha)$$
$$x \longmapsto k e^{\alpha x}$$

لتكن F مجموعة الدوال العددية f القابلة اللاشتقاق على $]-1, +\infty[$

بحيث مهما يكن x من $]-1, +\infty[$ فإن

$$(1 + x) f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1 + x)$$

1

1- لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$.

بين أن f تنتمي الى F إذا وفقط إذا كان لكل x من $]-1, +\infty[$

$$x + \int_0^x \ln(1 + t)\, dt = (x + 1) f(x) - f(0)$$

2- استنتج عناصر المجموعة F

1- الشرط اللازم و الكافي لانتماء f الى F

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بما يلي

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad g(x) = x + \int_0^x \ln(1+t)\, dt$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad h(x) = (x + 1) f(x) - f(0)$$

نلاحظ أن g و h قابلتين للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ وأن $h(0) = g(0)$

ومنه $\forall x \in]-1, +\infty[\quad g(x) = h(x)$ ويكافئ

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad g'(x) = h'(x)$$

أي $\forall x \in]-1, +\infty[\quad 1 + \ln(1 + x) = (x + 1) f'(x) + f(x)$

بمعنى أن $f \in F$

إذن $f \in F$ إذا وفقط إذا كان $h = g$

أي $$\forall x \in]-1, +\infty[\quad x + \int_0^x \ln(1 + t)\, dt = (x + 1) f(x) - f(0)$$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]-1, +\infty[$ لدينا

$$\int_0^x \ln(1 + t)\, dt = [t \ln(1 + t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t}\, dt$$

$$= x \ln(1 + x) - \int_0^x \frac{(t + 1) - 1}{1 + t}\, dt$$

$$= x \ln(1 + x) - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= x \ln(1 + x) - [t - \ln(1 + t)]_0^x$$
$$= x \ln(1 + x) - (x - \ln(1 + x))$$
$$= (x + 1) \ln(1 + x) - x$$

لتكن f دالة عددية f قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

حسب السؤال الاول $f \in F$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad (x + 1) \ln(1 + x) = (x + 1) f(x) - f(0)$$

أي $$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) = \ln(1 + x) + \frac{f(0)}{x + 1}$$

إذن F هي مجموعة الدوال المعرفة كما يلي

$$(\alpha \in IR) \quad x \longmapsto \ln(1 + x) + \frac{\alpha}{x + 1}$$

* * * *

2

نعتبر المعادلتين التفاضلتين التاليتين

$(E): \; y' + y = e^{2x}$

$(F): \; y'' - y' - 2y = 0$

1- حل المعادلة التفاضلية (F)

2- ليكن حلا للمعادلة التفاضلية (E)

بين أن y حلا للمعادلة التفاضلية (F)

3- استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

1- حل المعادلة التفاضلية (F)

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (F) هي

$$X^2 - X - 2 = 0$$

جذورها هما 1- و2

إذن حلول المعادلة التفاضلية (F) هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$$

حيث α و β عددان حقيقيتان

2- اثبات النتيجة المقترحة

لدينا y حل للمعادلة التفاضلية (E) ومنه

$$y' + y = e^{2x}$$

ومنه $(y' + y')' = 2e^{2x}$ و $y'' + y' = 2e^{2x}$

إذن $2y' + 2y = 2e^{2x}$ و $y'' + y' = 2e^{2x}$

ومنه $(y'' + y') - 2y' - 2y = 0$

أي $y'' - y' - 2y = 0$

وهذا يعني أن y حل للمعادلة التفاضلية (F)

3- الاستنتاج

إذا كان y حلا للمعادلة (E) فإن y حل للمعادلة (F)

ومنه $\forall x \in IR \quad y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$

حيث $(\alpha, \beta) \in IR^2$

لتكن y الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$$

لدينا $\forall x \in IR \quad y'(x) = -\alpha e^{-x} + 2\beta e^{2x}$

ومنه $\forall x \in IR \quad y(x) + y'(x) = 3\beta e^{2x}$

إذن $y + y' = e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in IR \;\; 3\beta e^{2x} = e^{2x}$

$$\Leftrightarrow 3\beta = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة كما يلي

$$(\alpha \in IR) \quad x \longmapsto \alpha e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$$

* * * *

3

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية

$$(E) \quad 3y'' - 2y' - y = 4xe^{-x}$$

1- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

بين أن f حل للمعادلة التفاضلية (E)

2- استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

1- الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (E)

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$f'(x) = -(x+2)e^{-x} + e^{-x}$$
$$= -(x+1)e^{-x}$$

ومنه

$$f''(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-x}$$
$$= xe^{-x}$$

إذن

$$3f''(x) - 2f'(x) - f(x) = [3x + 2(x+1) - (x+2)]e^{-x}$$
$$= 4xe^{-x}$$

وهذا يعني أن f حل للمعادلة التفاضلية (E)

2- الاستنتاج

حسب السؤال الاول لدينا

$$3f'' - 2f' - f = 4xe^{-x}$$

ومنه y حل لهذه المعادلة إذا وفقط إذا كان

أي $3y'' - 2y' - y = 3f'' - 2f' - f$

بمعنى أن $3(y-f)'' - 2(y-f)' - (y-f) = 0$

أي $y - f$ حل للمعادلة التفاضلية التالية

$$3z'' - 2z' - z = 0$$

المعادلة المميزة لها هي $3X^2 - 2X - 1 = 0$

ولدينا $-\frac{1}{3}$ و 1 هما جذراها ومنه

إذن حلول المعادلة التفاضلية الاخيرة هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto \alpha e^{-\frac{1}{3}x} + \beta e^{x}$$

α و β عنصران من IR .

إذن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto (x+2)e^{-x} + \alpha e^{-\frac{1}{3}x} + \beta e^{x}$$

حيث α و β عنصران من IR .

* * * *

4

لتكن F مجموعة الدوال العددية f القابلة للاشتقاق مرتين على IR_+^* بحيث

$$\forall x \in IR_+^* \quad x^2 f''(x) - xf'(x) - 3f(x) = 0$$

1- لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على IR_+^*

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad g(x) = f(e^x)$$

بين أن $f \in F$ إذا وفقط إذا كانت g حلا للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

2- أ- حل المعادلة التفاضلية $y'' - 2y' + 3y = 0$

ب- استنتج جميع عناصر المجموعة F

1- اثبات التكافؤ المقترح

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$g'(x) = e^x f'(e^x)$$

ومنه

$$g''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x)$$
$$= g'(x) + (e^x)^2 f''(e^x)$$

إذن $g''(x) - g'(x) = (e^x)^2 f''(e^x)$

نلاحظ أن $X = e^{\ln X}$ $\quad \forall X \in IR_+^*$ ومنه

$f \in F$ يكافئ $\forall x \in IR_+^* \quad x^2 f''(x) = xf'(x) + 3f(x)$

أي $\forall x \in IR_+^* \quad (e^x)^2 f''(e^x) = e^x f'(e^x) + 3f(e^x)$

أي $\forall x \in IR_+^* \quad g''(x) - g'(x) = g'(x) + 3g(x)$

أي $\forall x \in IR_+^* \quad g''(x) - 2g'(x) - 3g(x) = 0$

إذن $f \in F$ إذا وفقط إذا كانت g حلا للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y'' - 3y = 0$$

2-أ- حل المعادلة التفاضلية المقترحة

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y'' - 2y'' - 3y = 0$

هي $X^2 - 2X - 3 = 0$

جدراها هما -1 و 3

إذن حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة بما يلي

$$(\alpha \in IR, \beta \in IR) \quad x \longmapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{3x}$$

ب- الاستنتاج

لتكن f دالة عددية

حسب السؤال الاول والسؤال الثاني الجزء أ منه لدينا

$f \in F$ يكافئ يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث

$$\forall x \in IR_+^* \quad f(e^x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{3x}$$

أي $\forall x \in IR_+^* \quad f(e^x) = \frac{\alpha}{e^x} + \beta (e^x)^3$

أي $\forall X \in IR_+^* \quad f(X) = \frac{\alpha}{X} + \beta X^3$

إذن F هي مجموعة الدوال المعرفة على IR_+^* بما يلي

$$(\beta \in IR \text{ و } \alpha \in IR) \quad x \longmapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^3$$

* * * *

5

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية :

$$(E) \quad y'' + 9y = 2\cos x$$

1- لتكن y دالة عددية نعتبر الدالة العددية z المعرفة بما يلي

$$z(x) = y(x) - \frac{1}{4}\cos x$$

بين أن y حلا للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت z حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$

2- أ- حل المعادلة التفاضلية (E)

ب- حدد حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث $y(0) = 0$ و $y''(\pi) = 0$

1- الشرط اللازم و الكافي لكي يكون y حلا لها

ليكن x عنصرا من IR

لدينا $z'(x) = y'(x) + \frac{1}{4}\sin x$

ومنه $z''(x) = y''(x) + \frac{1}{4}\cos x$

إذن $z''(x) + 9z(x) = y''(x) + \frac{1}{4}\cos x + 9y(x) - \frac{9}{4}\cos x$

$$= y''(x) + 9y(x) - 2\cos x$$

ومنه $z'' + 9z = y' + 9y - 2\cos x$

إذن y حل المعادلة التفاضلية (E) يعني أن

$$y' + 9y - 2\cos x = 0$$

أي $z'' + 9z = 0$

بمعنى أن z حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$

2- أ- حل المعادلة التفاضلية

لدينا y حل للمعادلة التفاضلية (E) يعني أن $y - \frac{1}{4}\cos x$ حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$

وبما أن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$ هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto \lambda\cos(3x + \theta)$$

حيث $\lambda \in IR$ و $\theta \in IR$

فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\cos x + \lambda\cos(3x + \theta)$$

حيث $\lambda \in IR$ و $\theta \in IR$

ب- تحديد الحل y

لدينا y حل للمعادلة التفاضلية (E) وحسب السؤال السابق يوجد عددان حقيقيان λ و θ بحيث

$$\forall x \in IR \quad y(x) = \frac{1}{4}\cos x + \lambda\cos(3x + \theta)$$

لدينا $y(0) = \frac{1}{4} + \lambda\cos\theta$

ولدينا $\forall x \in IR \quad y'(x) = -\frac{1}{4}\sin x - 3\lambda\sin(3x + \theta)$

ومنه $y'(\pi) = -3\lambda\sin(3\pi + \theta)$

$$= 3\lambda\sin\theta$$

وبما أن $y(0) = 0$ و $y'(\pi) = 0$

$$\frac{1}{4} + \lambda\cos\theta = 0 \quad \text{و} \quad 3\lambda\sin\theta = 0$$

إذا كان $\lambda = 0$ فإن $\frac{1}{4} = 0$ وهذا غير ممكن

ومنه $\lambda \neq 0$ إذن $\sin\theta = 0$

ومنه $\forall x \in IR \quad \cos(3x + \theta) = \cos 3x\cos\theta$

إذن $\forall x \in IR \quad y(x) = \frac{1}{4}\cos x + \lambda\cos\theta\cos 3x$

وبما أن $\frac{1}{4} + \lambda\cos\theta = 0$ فإن

$$\forall x \in IR \quad y(x) = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$$

* * * *

6

لتكن F مجموعة الدوال العددية f بحيث

- قابلة للاشتقاق مرتين على IR_+^*
- لكل x من IR_+^* لدينا $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

1- لتكن عنصرا من F و نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad g(x) = f(e^x)$$

أ- بين أن $\forall x \in IR_+^* \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$

ب- استنتج أن g حل للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - y' + y = 0$$

2- أوجد جميع عناصر المجموعة F

من موضوع دورة 1993

1-أ- اثبات النتيجة المقترحة

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه $f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

وبما أن $\forall X \in IR_+^* \quad f'(X) = f\left(\frac{1}{X}\right)$ فإن $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

إذن $f''(x) = -\frac{1}{x^2}f(x)$ أي $x^2 f''(x) + f(x) = 0$

وبالتالي فإن $\forall x \in IR_+^* \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$

ب- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من IR لدينا $g(x) = f(e^x)$

ومنه $g'(x) = e^x f'(e^x)$

إذن $g''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x)$

وحسب السؤال السابق لدينا $(e^x)^2 f''(e^x) = -f(e^x)$

ومنه $g''(x) = g'(x) - g(x)$

إذن $\forall x \in IR \quad g''(x) - g'(x) + g(x) = 0$

وهذا يعني أن g حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + y = 0$

2- تحديد المجموعة F

ليكن f عنصرا من F حسب السؤال الاول لدينا g حل للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y' + y = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي $X^2 - X + 1 = 0$

حلا هذه المعادلة المميزة هما

$$a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y'' - y + y = 0$ هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \theta\right)$$

حيث $\lambda \in IR$ و $\theta \in IR$

إذن يوجد عددان حقيقيان λ و θ بحيث

$$\forall x \in IR \quad f(e^x) = \lambda\sqrt{e^x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \theta\right)$$

وبما أن $x = e^{\ln x}$ $\forall x \in IR_+^*$ فإن

$$\forall x \in IR_+^* \quad f(x) = \lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \theta\right)$$

بما أن $f \in F$ فإن $\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه $f'(1) = f(1)$

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا

$$f'(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \theta\right) - \lambda\sqrt{x}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \theta\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \theta\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \theta\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

ومنه $f'(1) = \lambda\cos\left(-\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

ولدينا $f(1) = \lambda\cos(-\theta)$

نفترض أن $\lambda \neq 0$

ومنه $\cos\left(-\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(-\theta)$

أي $\exists k \in \mathbb{Z} \quad -\theta - \frac{\pi}{3} = -\theta + 2k\pi$

أو

$\exists k \in \mathbb{Z} \quad -\theta - \frac{\pi}{3} = \theta + 2k\pi$

أي $\exists k \in \mathbb{Z} \quad -\theta - \frac{\pi}{3} = \theta + 2k\pi$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad f'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \theta\right)$

حيث $\theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ولدينا $\forall x \in IR_+^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \theta\right)$

أي $\forall x \in IR_+^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \theta\right)$

ومنه $\forall x \in IR_+^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x)$

إذن F هي مجموعة الدوال العددية المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto \lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$$

حيث $\lambda \in IR$ و $k \in \mathbb{Z}$

* * * *

7

نعتبر F مجموعة الدوال العددية القابلة للاشتقاق مرتين على IR

بحيث $\forall x \in IR \quad x^2 f''(x) - 2f(x) = 0$

1- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على IR. نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad g(x) = f(e^x)$$
$$\forall x \in IR \quad h(x) = f(-e^x)$$

بين أن إذا كان $f \in F$ فإن g و h حلين للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 2y = 0$$

بحيث $\lim_{x \to -\infty} g = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} h = 0$

2- أ- حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 2y = 0$

ب- استنتج جميع عناصر المجموعة F .

1- الشرط اللازم والكافي لانتماء f الى F

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$g'(x) = e^x f'(e^x)$$

ومنه $g''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x)$

أي $g''(x) = g'(x) + (e^x)^2 f''(e^x)$

بمعنى أن $g''(x) - g'(x) = (e^x)^2 f''(e^x)$

لدينا $h'(x) = -e^x f'(-e^x)$

ومنه $h''(x) = -e^x f'(-e^x) + (e^x)^2 f''(-e^x)$

أي $h''(x) - h'(x) = (-e^x)^2 f''(-e^x)$

إذن إذا كان $f \in F$ فإن

$$\forall x \in IR \quad x^2 f''(x) = 2f(x)$$

ومنه
$$\begin{cases} \forall x \in IR \quad (e^x)^2 f''(e^x) = 2f(e^x) \\ \forall x \in IR \quad (-e^x)^2 f''(-e^x) = 2f(-e^x) \end{cases}$$

أي $\forall x \in IR \quad g''(x) - g'(x) = 2g(x)$

و $\forall x \in IR \quad h''(x) - h'(x) = 2\,h(x)$

أي g و h حلان للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 2y = 0$$

لدينا

$$\lim_{x \to -\infty} g = \lim_{x \to -\infty} f(e^x) = \lim_{X \to 0} f(X) = f(0)$$

وبما أن $\forall x \in IR \quad x^2 f''(x) = 2f(x)$ فإن $2f(0) = 0$

ومنه $\lim_{x \to -\infty} g = 0$

وبالمثل لدينا $\lim_{x \to -\infty} h = 0$

2-أ- حل المعادلة التفاضلية المقترحة

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المقترحة هي

$$X^2 - X - 2 = 0$$

ولدينا 2 و 1- هما جذراها

إذن حلول المعادلة التفاضلية المقترحة هي الدوال المعرفة كما يلي

$$(\alpha, \beta) \in IR \qquad x \longmapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$$

ب- الاستنتاج

ليكن f عنصرا من F

لدينا g حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' - 2y = 0$ ومنه

يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث

$$\forall x \in IR \quad g(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$$

لدينا $\lim_{x \to -\infty} g = 0$ ومنه $\alpha = 0$

لانه إذا كان $\alpha > 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

وإذا كان $\alpha < 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

إذن $(\exists \beta \in IR)(\forall x \in IR) \quad g(x) = \beta e^{2x}$

وبالمثل نبين أن $(\exists \alpha \in IR)\ (\forall x \in IR) \quad h(x) = \alpha e^{2x}$

ليكن x عنصرا من IR

إذا كان $x > 0$ فإن $x = e^{\ln x}$ ومنه

$$\begin{aligned} f(x) &= f(e^{\ln x}) \\ &= g(\ln x) \\ &= \beta e^{2\ln x} \\ &= \beta x^2 \end{aligned}$$

إذا كان $x < 0$ فإن $x = -e^{\ln(-x)}$ ومنه

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-e^{\ln(-x)}) \\ &= h(\ln(-x)) \\ &= \alpha e^{2\ln(-x)} \\ &= \alpha x^2 \end{aligned}$$

ولدينا $f(0) = 0$ إذن

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & ; \quad x \le 0 \\ \beta x^2 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$$

* لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & ; \quad x \le 0 \\ \beta x^2 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$

ولدينا f قابلة للاشتقاق في 0

و

$$f'(x) = \begin{cases} 2\alpha x & ; \quad x \le 0 \\ 2\beta x & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f'(0)}{x} = 2\beta$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2\alpha$$

إذن تكون f' قابلة للاشتقاق في 0 إذا وفقط إذا كان $\alpha = \beta$

وبالتالي فإن F مكونة من الدوال المعرفة بما يلي

$$(a \in IR) \quad x \longmapsto a x^2$$

* * * *

8

لتكن f دالة عددية متصلة على IR و a عدد حقيقي.

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$(E) \quad y' + a y = \frac{f}{u}$$

حيث u هي الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \quad u(x) = e^{ax}$$

1- لتكن y دالة عددية قابلة للاشتقاق على IR

بين أن y حل للمعادلة التفاضلية إذا وفقط إذا كان $(y\,u)' = f$

2- استنتج أن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال التالية

$$x \longmapsto e^{-ax} \int_0^x f(t)\,dt + \alpha e^{-ax}$$

3- حل المعادلات التفاضلية التالية

$$y' + 2y = e^{-2x}$$

$$y' - y = (x^2 + 2x - 3)\,e^x$$

$$y' + a y = e^{bx}$$

حيث b بارامتر حقيقي غير منعدم $(a + b \neq 0)$

1- الشرط اللازم و الكافي لكي يكون y حلا لها

لدينا $(y u)' = f \Leftrightarrow y' u + y u' = f$

ولدينا $\forall x \in IR \quad u'(x) = a e^{ax}$ أي $u' = au$

ومنه $(y u)' = f \Leftrightarrow y' u + a y u = f$

$$\Leftrightarrow y' + ay = \frac{f}{u}$$

إذن y حل للمعادلة التفاضلية يكافئ $(yu)' = f$

2- الاستنتاج

حسب السؤال السابق y حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان yu دالة أصلية للدالة f .

لتكن F الدالة الاصلية للدالة f التي تنعدم في 0

لدينا $F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in IR$

إذن y حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان

$$\exists \alpha \in IR \qquad y u = F + \alpha$$

أي

$$\exists \alpha \in IR \qquad y = \frac{F}{u} + \frac{\alpha}{u}$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto e^{-ax} \int_0^x f(t) dt + \alpha e^{-ax}$$

حيث $\alpha \in IR$

3- حل المعادلة التفاضلية الاولى

المعادلة التفاضلية $y' + 2y = e^{-2x}$ تكتب على الشكل

$$y' + ay = \frac{f}{u}$$

حيث $a = 2$ و u هي الدالة العددية المعرفة بما يلي $u(x) = e^{2x}$

و f هي الدالة المعرفة بما يلي بما يلي $f(x) = 1$

وحسب السؤال الثاني فإن حلولها هي الدوال المعرفة كما يلي

$$x \longmapsto e^{-2x} \int_0^x dt + \alpha e^{-2x}$$

حيث $\alpha \in IR$

أي هي الدوال المعرفة بما يلي

$$(\alpha \in IR) \quad x \longmapsto x e^{-2x} + \alpha e^{-2x}$$

حل المعادلة التفاضلية الثانية

المعادلة التفاضلية الثانية تكافئ

$$y' + ay = \frac{f}{u}$$

حيث $a = -1$ و u و f هما الدالتان المعرفتان بما يلي

$$u(x) = e^{-x} \qquad f(x) = x^2 + 2x - 3$$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (t^2 + 2t - 3) dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + t^2 - 3t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + x^2 - 3x$$

حسب السؤال الثاني فإن حلولها هي الدوال المعرفة بما يلي

$$(\alpha \in IR) \qquad x \longmapsto \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)e^x + \alpha e^x$$

حل المعادلة التفاضلية الثالثة

المعادلة الثالثة تكتب على الشكل

$$y' + ay = \frac{f}{u}$$

حيث u و f هما الدالتان النعرفتان بما يلي

$$f(x) = e^{(a+b)x} \text{ و } u(x) = e^{ax}$$

لان $\forall x \in IR \qquad \frac{e^{(a+b)x}}{e^{ax}} = e^{bx}$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{(a+b)t} dt$$

$$= \left[\frac{e^{(a+b)t}}{a+b}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{a+b} e^{(a+b)x} - \frac{1}{a+b}$$

ومنه

$$e^{-ax} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{a+b} e^{bx} - \frac{1}{a+b} e^{-ax}$$

وحسب السؤال الثاني فإن حلولها هي الدوال المعرفة بما يلي

$$(\alpha \in IR) \quad x \longmapsto \frac{1}{a+b} e^{bx} - \frac{1}{a+b} e^{-ax} + \alpha e^{-ax}$$

أي هي الدوال المعرفة بما يلي

$$(\beta \in IR) \quad x \longmapsto \frac{1}{a+b} e^{bx} + \beta e^{-ax}$$

* * * *

9

لتكن f دالة عددية متصلة على IR . a و b عددان حقيقيان

نعتبر المعادلتين التفاضليتين

$$(E) \qquad y' - by = f$$

$$(F) \qquad y'' - (a+b)y + aby = f$$

ليكن y_o حلا للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق $y_o(0) = 0$ و z_o حلا للمعادلة التفاضلية (F) الذي يحقق $z'_o(0) = z_o(0) = 0$

1- نعتبر الدالة العددية u المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \qquad u(x) = e^{-bx}$$

أ- بين أن $(y_o u)' = fu$

ب- استنتج أنه مهما يكن x من IR فإن

$$y_o(x) = e^{bx} \int_0^x f(t)\, e^{-bt}\, dt$$

2- أ- بين أن $z'_o - az_o$ حل للمعادلة التفاضلية (E)

ب- استنتج أن $z'_o - az_o = y_o$

ج- بين أنه مهما يكن x من IR فإن

$$z_o(x) = e^{ax} \int_0^x y_o(t)\, e^{-at}\, dt$$

3- تطبيق حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 3y' + 2y = x\, e^{2x}$$

1-أ- اثبات المتساوية المقترحة

لدينا y_o حل للمعادلة التفاضلية (E) ومنه

$$y''_o - by_o = f \quad \text{أي} \quad y'_o u - b y_o u = f u$$

وبما أن $u' = -b u$ فإن $y'_o u + y_o u' = f u$

أي $(y_o u)' = f u$

ب- الاستنتاج

لدينا $(y_o u)' = f u$ و $u\, y_o(0) = 0$ ومنه فإن $y_o u$ هي الدالة الاصلية للدالة fu التي تنعدم في 0

ومنه

$$\forall x \in IR \qquad (y_o u)(x) = \int_0^x (fu)(t)\, dt$$

أي

$$\forall x \in IR \qquad y_o(x)\, e^{-bx} = \int_0^x f(t)\, e^{-bt}\, dt$$

إذن

$$\forall x \in IR \qquad y_o(x) = e^{bx} \int_0^x f(t)\, e^{-bt}\, dt$$

2-أ الحل الخاص للمعادلة (E)

لدينا z_o حل للمعادلة التفاضلية (F) ومنه

$$z''_o - (a+b)\, z'_o + ab\, z_o = f$$

أي

$$z''_o - az'_o - b\,(z'_o - az_o) = f$$

وهذا يعني أن $z'_o - az_o$ حل للمعادلة التفاضلية (E)

ب- الاستنتاج

لدينا y_o و $z'_o - a\,z_o$ حلان للمعادلة التفاضلية (E)

ولدينا $y_o(0) = 0$ و $(z'_o - az_o)(0) = 0$

إذن $y_o = z'_o - a\,z_o$

ج- تحديد الحل z_o

لدينا $z' - az_o = y_o$

إذا اعتبرنا الدالة v المعرفة بما يلي

$$\forall x \in IR \qquad v(x) = e^{-ax}$$

نجد أن $v\,z'_o - az_o\, v = y_o\, v$

أي $(v\, z_o)' = y_o v$

وبما أن $(vz_o)(0) = 0$ فإن

أي

$$\forall x \in IR \qquad v\, z_o(x) = \int_0^x (y_o\, v)(t)\, dt$$

إذن

$$\forall x \in IR \qquad v(x)\, z_o(x) = \int_0^x y_o(t)\, e^{-at}\, dt$$

إذن

$$\forall x \in IR \qquad z_o(x) = e^{ax} \int_0^x y_o(t)\, e^{-at}\, dt$$

3- تطبيق

المعادلة المقترحة تكتب على الشكل التالي

$$y'' - (a+b)y' + ab\, y = f$$

حيث $a = 1$ و $b = 2$ و f هي الدالة $x \longrightarrow x\, e^{2x}$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$y_o(x) = e^{2x} \int_0^x f(t)\, e^{-2t}\, dt$$

$$= e^{2x} \int_0^x t\, e^{2t} \cdot e^{-2t}\, dt$$

$$= e^{2x} \int_0^x t\, dt$$

$$= e^{2x} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$= \frac{x^2}{2}\, e^{2x}$$

ومنه الحل الخاص لهذه المعادلة معرف كما يلي

$$\forall x \in IR \qquad z_o(x) = e^x \int_0^x \frac{t^2}{2}\, e^{2t} \cdot e^{-t}\, dt$$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$\int_0^x t^2 e^t\,dt = [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2te^t\,dt$$

$$= x^2 e^x - 2\left([t e^x]_0^x - \int_0^x e^t\,dt\right)$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\,[e^t]_0^x$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$$

ومنه $z_o(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{2x} - e^x$

لدينا y حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ يعني أن

$$y'' - 3y' + 2y = z''_o - 3z'_o + 2z_o$$

أي $(y - z_o)'' - 3(y - z_o) + 2(y - z_o) = 0$

أي $y - z_o$ حل للمعادلة التفاضلية

$$Z'' - 3Z' + 2 = 0$$

المعادلة المميزة لها هي $X^2 - 3X + 2 = 0$ وهي تقبل جذرين حقيقيين وهما 1 و2

ومنه حلولها هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longrightarrow \alpha e^x + \beta e^{2x} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = x\,e^{2x}$ هي الدوال المعرفة كما يلي

$$x \longrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{2x} + \alpha e^x + \beta e^{2x}$$

حيث α و β عنصران من IR.

* * * *

10

لتكن f دالة متصلة على IR و F دالتها الاصلية التي تنعدم في 0

و a عددا حقيقيا و u دالة عددية معرفة بما يلي $u(x) = e^{ax}$

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية

$$(E) \qquad y'' - 2ay'' + a^2 y = fu$$

1- لتكن y دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على IR

بين أن y حل للمعادلة التفاضلية إذا وفقط إذا كان

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{y}{u}\right) = F + k$$

2- استنتج أن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال العددية المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto e^{ax}\int_0^x F(t)\,dt + kxe^{ax} + \alpha e^{ax}$$

$(k \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R})$

3- حل المعادلات التفاضلية التالية

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}$$

$$y'' - 4y + 4y = 2x + 1$$

$$y'' + 2y'' + y = e^{-x}\sin x$$

1- الشرط اللازم و الكافي لكي يكون y حلا لها

لدينا

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{y}{u}\right) = F + k \Leftrightarrow \left(\frac{y}{u}\right)'' = F'$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y'u - u'y}{u^2}\right)' = f$$

لدينا $u'(x) = ae^{ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ أي $u' = au$

ومنه

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{y}{u}\right) = F + k \Leftrightarrow \left(\frac{y'u - auy}{u^2}\right)' = f$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y' - ay'}{u}\right)' = f$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y'' - ay')u - u'(y' - ay)}{u^2} = f$$

$$\Leftrightarrow (y'' - ay')u - a(y' - ay)u = fu^2$$

$$\Leftrightarrow y'' - ay' - ay' + a^2 y = fu$$

$$\Leftrightarrow y'' - 2ay' + a^2 y = fu$$

إذن y حل للمعادلة التفاضلية (E) يكافئ $\exists k \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{y}{u}\right)' = F + k$

2- الاستنتاج

لدينا y حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{y}{u}\right)' = F + k$$

أي $\frac{y}{u}$ هي دالة أصلية للدالة $F + k$

نعتبر G الدالة الاصلية للدالة $F + k$ التي تنعدم في 0

لدينا y حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \frac{y}{u} = G + \alpha$$

أي

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad y = uG + \alpha u$$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$G(x) = \int_0^x (F + k)(t)\,dt$$

$$= \int_0^x F(t)\,dt + \int_0^x k\,dt$$

$$= \int_0^x F(t)\,dt + kx$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto e^{ax}\int_0^x F(t)\,dt + kxe^{ax} + \alpha e^{ax}$$

3- حل المعادلة التفاضلية الاولى

المعادلة التفاضلية الاولى تكتب على الشكل $y'' - 2ay' + a^2 y = u.f$

حيث $a = 1$ و u و f هما الدالتان المعرفتان بما يلي

$$u(x) = e^x \quad \text{و} \quad f(x) = e^x$$

لدينا $F(x) = \int_0^x e^t\, dt \qquad \forall x \in IR$

أي $F(x) = e^x - 1 \qquad \forall x \in IR$

وحسب السؤال الثاني لدينا حلول المعادلة التفاضلية الاولى هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto e^x \int_0^x (e^t - 1)\, dt + k\, x e^x + \alpha e^x$$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$\int_0^x (e^t - 1)\, dt = [e^t - t]_0^x$$

$$= (e^x - x) - 1$$

$$= e^x - (x+1)$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية الاولى هي الدوال المعرفة كما يلي

$$x \longmapsto e^{2x} - (x+1)e^x + k\, x e^x + \alpha e^x$$

حيث $\alpha \in IR$ و $k \in IR$

أي هي الدوال المعرفة كما يلي

$$x \longmapsto e^{2x} + \alpha\, x e^x + \beta e^x$$

حيث α و β عنصران من IR

حل المعادلة التفاضلية الثانية

المعادلة التفاضلية الثانية تكتب على الشكل

$$y'' - 2\, ay + a^2 = f.\, u$$

حيث $a = 2$ و u و f هما الدالتان المعرفتان بما يلي

$$u(x) = e^{2x} \quad \text{و} \quad f(x) = (2x+1)\, e^{-2x}$$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$F(x) = \int_0^x (2t+1)\, e^{-2t}\, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-2t}(2t+1)\right]_0^x - \int_0^x 2\left(-\frac{1}{2} e^{-2t}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x}(2x+1) + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2} e^{-2t}\right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} e^{-2x} + 1$$

ومنه

$$\int_0^x F(t)\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\, dt + \int_0^x dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} e^{-2x} + 1\right) + \frac{1}{4}(e^{-2x} - 1) + x$$

$$= \frac{1}{4} f(x) + \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{4} + x$$

$$= \frac{1}{4} f(x) + \frac{1}{2} e^{-2x} + x - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2} x\, e^{-2x} + \frac{3}{4} e^{-2x} + x - \frac{3}{4}$$

ومنه

$$e^{2x} \int_0^x F(t)\, dt = \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} + x\, e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x}$$

إذن حلول هذه المعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة كما يلي

$$x \longmapsto \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} + \alpha\, x e^{2x} + \beta e^{2x}$$

حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

حل المعادلة التفاضلية الثالثة

المعادلة التفاضلية الثالثة تكتب على الشكل

$$y'' - 2\, a\, y' + y = f.\, u$$

حيث $a = -1$ و f و u دالتان معرفتان بما يلي

$$u(x) = e^{-x} \quad \text{و} \quad f(x) = \sin x$$

ليكن x عنصرا من IR لدينا

$$F(x) = \int_0^x \sin t\, dt$$

$$= [-\cos t]_0^x$$

$$= -\cos x + 1$$

ومنه

$$\int_0^x F(t)\, dt = \int_0^x (1 - \cos t)\, dt$$

$$= [t - \sin t]_0^x$$

$$= x - \sin x$$

إذن حلول هذه المعادلة هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto x\, e^{-x} - e^{-x} \sin x + \alpha\, x\, e^{-x} + \beta e^{-x}$$

حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

أي هي الدوال المعرفة بما يلي

$$x \longmapsto -e^{-x} \sin x + \alpha\, x\, e^{-x} + \beta e^{-x}$$

حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

* * * *

الفهرس